14924. α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-x-12 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 8)**

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2-\left(\frac{\pi+9}{3}\right)-12>0$, όπου $\pi=3{,}1415\ldots$. **(Μονάδες 9)**

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $\left(|\alpha|+3\right)^2-\left(|\alpha|+3\right)-12<0$, να δείξετε ότι $\alpha\in(-1,1)$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-12)=49$ και ρίζες $x_1=\frac{1-7}{2}=-3$, $x_2=\frac{1+7}{2}=4$.

Για κάθε $x\in(-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$ είναι $x^2-x-12>0$
και για κάθε $x\in(-3,4)$ είναι $x^2-x-12<0$

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
x^2-x-12	+	0	–	0	+

β) Είναι $\frac{\pi+9}{3}>4$ γιατί $\pi+9>12\Leftrightarrow\pi>3$, οπότε με βάση το προηγούμενο πρόσημο είναι
$\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2-\left(\frac{\pi+9}{3}\right)-12>0$

γ) Η παράσταση $\left(|\alpha|+3\right)^2-\left(|\alpha|+3\right)-12<0$ είναι η αριθμητική τιμή του τριωνύμου x^2-x-12 για $x=|\alpha|+3$. Επειδή για κάθε $x\in(-3,4)$ είναι $x^2-x-12<0$, ισχύει ότι

$$-3<|\alpha|+3<4\Leftrightarrow-6<|\alpha|<1\Leftrightarrow\begin{cases}|\alpha|>-6 \text{ ισχύει}\\ |\alpha|<1\Leftrightarrow-1<\alpha<1\end{cases}$$

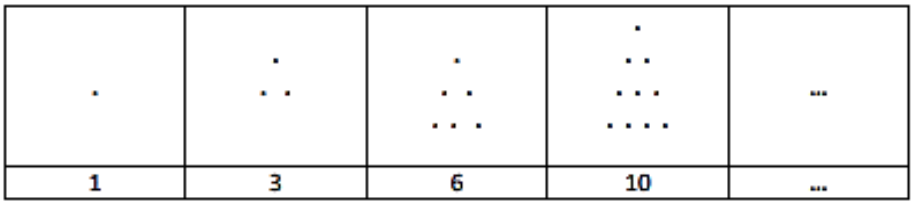
Askisopolis

Πρόοδοι

Ακολουθίες

4ο Θέμα

13056.Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.



Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον 10ο τριγωνικό αριθμό. **(Μονάδες 6)**

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός. **(Μονάδες 9)**

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Ο δέκατος τριγωνικός αριθμός είναι $T_{10} = \frac{10\cdot(10+1)}{2} = \frac{110}{2} = 55$.

β) Ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός μόνο όταν η εξίσωση $T_\nu = 120$ έχει λύση θετικό ακέραιο αριθμό. Είναι:

$$T_\nu = 120 \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow \nu^2+\nu = 240 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-240 = 0$$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-240) = 961$ και ρίζες

$$\nu_1 = \frac{-1+\sqrt{961}}{2} = \frac{-1+31}{2} = 15,$$

$$\nu_2 = \frac{-1-\sqrt{961}}{2} = \frac{-1-31}{2} = -16$$ που απορρίπτεται αφού ο ν είναι φυσικός αριθμός.

γ) Έστω $T_\nu, T_{\nu+1}$ δυο διαδοχικοί τριγωνικοί αριθμοί με ν θετικό ακέραιο. Τότε έχουμε:

$$T_\nu + T_{\nu+1} = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} = \frac{\nu(\nu+1)+(\nu+1)(\nu+2)}{2} = \frac{(\nu+1)(\nu+\nu+2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$T_\nu + T_{\nu+1} = \frac{(\nu+1)(2\nu+2)}{2} = \frac{(\nu+1)\cdot \cancel{2}(\nu+1)}{\cancel{2}} = (\nu+1)^2$$

οπότε το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Αριθμητική πρόοδος

2ο θέμα

1240.Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. **(Μονάδες 10)**

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in N^*$ και να βρείτε

ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $\alpha_2=0\Leftrightarrow\alpha_1+\omega=0$ (1), $\alpha_4=4\Leftrightarrow\alpha_1+3\omega=4$ (2)

Από $(2)-(1)\Rightarrow \cancel{\alpha_1}+3\omega-\cancel{\alpha_1}-\omega=4-0\Leftrightarrow 2\omega=4\Leftrightarrow\omega=2$ (3)

$(1)\overset{(3)}{\Rightarrow}\alpha_1+2=0\Leftrightarrow\alpha_1=-2$

β) $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega=-2+(\nu-1)\cdot 2=-2+2\nu-2=2\nu-4$

$\alpha_\nu=98\Leftrightarrow 2\nu-4=98\Leftrightarrow 2\nu=102\Leftrightarrow\nu=51$

1245.α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί : $x+2,(x+1)^2$, $3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **(Μονάδες 13)**

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) $x=1$ **ii) $x=-1$.** **(Μονάδες 12)**

Λύση

α)Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει (2β=α+γ)

$2(x+1)^2=x+2+3x+2\Leftrightarrow 2x^2+\cancel{4x}+2=\cancel{4x}+4\Leftrightarrow 2x^2=2\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$

β) i) Για $x=1$ οι αριθμοί που μας δίνονται είναι οι $x+2=3,(x+1)^2=4,\ 3x+2=5$

Τότε $\omega=4-3=1$.

ii) Για $x=-1$ οι αριθμοί που μας δίνονται είναι οι

$x+2=1,(x+1)^2=0,\ 3x+2=-1$, τότε $\omega=0-1=-1$

1247.Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς. **(Μονάδες 9)**

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; **(Μονάδες 8)**

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Αν θεωρήσω μία ακολουθία (α_ν),όπου α_1 η πρώτη σειρά καθισμάτων , α_2 η δεύτερη σειρά καθισμάτων …. Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 20. Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=20$ και $\alpha_1=120$. Το πλήθος των καθισμάτων της ν- οστής σειράς είναι:

$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega=120+(\nu-1)\cdot 20=120+20\nu-20=100+20\nu$

β) $\alpha_{10}=100+20\cdot 10=100+200=300$

γ) $S_{10}=\frac{10}{2}(2\alpha_1+9\omega)=5(2\cdot 120+9\cdot 20)=5(240+180)=5\cdot 420=2100$

1249.Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. **(Μονάδες 9)**

β) Να βρείτε τον α_{20} . **(Μονάδες 8)**

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega - (\alpha_1 + 5\omega) = 24 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1} + 9\omega \cancel{-\alpha_1} - 5\omega = 24 \Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$

β) $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = 19 + 19 \cdot 6 = 19 + 114 = 133$

γ) $S_{20} = \frac{20}{2}(2\alpha_1 + 19\omega) = 10(2 \cdot 19 + 19 \cdot 6) = 10 \cdot (38 + 114) = 10 \cdot 152 = 1520$

1256. Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_v).

α) Να βρείτε τη τιμή του x. **(Μονάδες 10)**

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_v),

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω. **(Μονάδες 7)**

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α)Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει

$2B = A + \Gamma \Leftrightarrow 2(x + 4) = 1 + x + 8 \Leftrightarrow 2x \cancel{+8} = 1 + x \cancel{+8} \Leftrightarrow x = 1$

β) Για $x = 1$οι αριθμοί που μας δίνονται είναι οι $A = \alpha_1 = 1$,$B = 5$και $\Gamma = 9$.

i) Τότε $\omega = B - A = 5 - 1 = 4$

ii) $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19v = 1 + 19 \cdot 4 = 1 + 76 = 77$

1266.Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$ **(Μονάδες 12)**

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $\Delta = (-2\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\beta^2 - 4) = \cancel{4\beta^2} \cancel{-4\beta^2} + 16 = 16 = 4^2$

$x_1 = \frac{2\beta + 4}{2} = \frac{\cancel{2}(\beta + 2)}{\cancel{2}} = \beta + 2$ και $x_2 = \frac{2\beta - 4}{2} = \frac{\cancel{2}(\beta - 2)}{\cancel{2}} = \beta - 2$

β) οι αριθμοί x_1, β, x_2, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν:

$2\beta = x_1 + x_2 \Leftrightarrow 2\beta = \beta \cancel{+2} + \beta \cancel{-2} \Leftrightarrow 2\beta = 2\beta$ ισχύει

1325.Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. **(Μονάδες 12)**
β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1} + 24\omega = \cancel{\alpha_1} + 11\omega + 39 \Leftrightarrow 13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$

β) $\alpha_\nu = 152 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 152 \Leftrightarrow 2 + (\nu-1)\cdot 3 = 152 \Leftrightarrow$

$2 + 3\nu - 3 = 152 \Leftrightarrow 3\nu = 153 \Leftrightarrow \nu = \dfrac{153}{3} = 51$

Άρα ο $51^{ος}$ όρος είναι ίσος με 152.

1326.Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$ **(Μονάδες 13)**

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2 \Leftrightarrow \alpha_{15} - \alpha_9 = 2(\alpha_{10} - \alpha_7) \Leftrightarrow \alpha_1 + 14\omega - (\alpha_1 + 8\omega) = 2[\alpha_1 + 9\omega - (\alpha_1 + 6\omega)] \Leftrightarrow$

$\cancel{\alpha_1} + 14\omega - \cancel{\alpha_1} - 8\omega = 2(\cancel{\alpha_1} + 9\omega - \cancel{\alpha_1} - 6\omega) \Leftrightarrow 6\omega = 2\cdot 3\omega \Leftrightarrow 6\omega = 6\omega$ ισχύει

β) $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2\ (1)$, $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18\ (2)$

Από την $(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \dfrac{18}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2 \Leftrightarrow 18 = 2(\alpha_{10} - \alpha_7) \overset{(:2)}{\Leftrightarrow} 9 = \alpha_{10} - \alpha_7 \Leftrightarrow 9 = \cancel{\alpha_1} + 9\omega - \cancel{\alpha_1} - 6\omega \Leftrightarrow 9 = 3\omega \Leftrightarrow \omega = 3$

1329.Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. **(Μονάδες 12)**
β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 + 5\omega + \alpha_1 + 10\omega = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40 \Leftrightarrow$

$2\alpha_1 + 15\cdot 4 = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 60 = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = -20 \Leftrightarrow \alpha_1 = -10$

β) $S_\nu = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega) = 0 \overset{\nu\neq 0}{\Leftrightarrow} 2\cdot(-10) + (\nu-1)4 = 0 \Leftrightarrow -20 + 4\nu - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\nu = 24 \Leftrightarrow \nu = 6$

Επομένως θα πρέπει να προσθέσουμε τους έξι πρώτους όρους

1336.Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.
(Μονάδες 13)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει :

$2(5x+2) = x+6+11x-6 \Leftrightarrow 10x+4 = 12x \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Άρα οι αριθμοί που δίνονται είναι οι 8,12,16 και $\omega = 12-8 = 4$.

β) $S_8 = \frac{8}{2}(2\alpha_1 + 7\omega) = 4\cdot(0+7\cdot 4) = 4\cdot 28 = 112$

1343.Σε αριθμητική πρόοδο (α_v) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. **(Μονάδες 12)**

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. **(Μονάδες 13)**

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

Λύση

α) $\alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow 2 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow 4\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 3$

β) $S_v = 77 \Leftrightarrow \frac{v}{2}(2\alpha_1 + (v-1)\omega) = 77 \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} v(2\cdot 2 + (v-1)\cdot 3) = 154 \Leftrightarrow$

$v(4+3v-3) = 154 \Leftrightarrow v(3v+1) - 154 = 0 \Leftrightarrow 3v^2 + v - 154 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 3\cdot(-154) = 1 + 1848 = 1849$

Άρα $v = \frac{-1+\sqrt{1849}}{2\cdot 3} = \frac{-1+43}{6} = \frac{42}{6} = 7$ ή

$v = \frac{-1-\sqrt{1849}}{2\cdot 3} = \frac{-1-43}{6} = \frac{-44}{6} = -\frac{22}{3} < 0$ απορρίπτεται

1370.α) Να βρείτε το άθροισμα των *ν* πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων1,2,3,…ν (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες13)

Λύση

α) Έχουμε την ακολουθία $\alpha_v = v$ και $\alpha_{v+1} - \alpha_v = v+1-v = 1$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 1$.

$S_v = \frac{v}{2}(2\alpha_1 + (v-1)\cdot\omega) = \frac{v}{2}(2\cdot 1 + (v-1)\cdot 1) = \frac{v}{2}(2+v-1) = \frac{v}{2}(1+v) = \frac{v(v+1)}{2}$

β) $S_v = 45 \Leftrightarrow \frac{v(v+1)}{2} = 45 \Leftrightarrow v^2 + v = 90 \Leftrightarrow v^2 + v - 90 = 0$, $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-90) + 360 = 361 = 19^2$

$v = \frac{-1+19}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ή $v = \frac{-1-19}{2} = \frac{-20}{2} = -10$ απορρίπτεται (v>0)

14597.Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει 4 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα.

α)Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς. **(Μονάδες 8)**

γ) Πόσα καθίσματα το γήπεδο συνολικά; **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Αν θεωρήσω μία ακολουθία (α_v),όπου α_1 η πρώτη σειρά καθισμάτων ,α_2 η δεύτερη σειρά καθισμάτων …. Κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 4. Άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά 4.

β) $\alpha_7 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6\cdot 4 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 24 = 12$

γ) Αφού το γήπεδο έχει δέκα σειρές, τότε το πλήθος των καθισμάτων συνολικά δίνεται από τον τύπο:

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left(2\alpha_1 + 9\omega\right) = 5\left(2\cdot 12 + 9\cdot 4\right) = 5\left(24 + 36\right) = 5\cdot 60 = 300$$

14656.Σε μία αριθμητική πρόοδο $\left(\alpha_v\right)$ δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. **(Μονάδες 12)**

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_v = v$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Είναι $\alpha_6 = \alpha_1 + \left(6-1\right)\omega \Leftrightarrow 26 = 41 + 5\omega \Leftrightarrow 5\omega = 26 - 41 \Leftrightarrow 5\omega = -15 \Leftrightarrow \omega = -3$

β) $\alpha_v = v \Leftrightarrow 41 + \left(v-1\right)\cdot\left(-3\right) = v \Leftrightarrow 41 - 3v + 3 = v \Leftrightarrow 44 = 4v \Leftrightarrow v = 11$

4ο θέμα

1387.Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων .
Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. **(Μονάδες 4)**

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; **(Μονάδες 5)**

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. **(Μονάδες 5)**

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνεται κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Άρα αποτελεί αριθμητική πρόοδο (α_v) με α_1=16 καθίσματα και διαφορά ω που είναι ο αριθμός κατά τον οποίο αυξάνεται μία σειρά σε σχέση με την προηγούμενη της. Η 7η σειρά είναι ο

$\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow 16 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow 6\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 2$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 16 + (\nu - 1)\cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 16 + 2\nu - 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu + 14$

γ) $S_{20} = \frac{20}{2}\left(2a_1 + 19\omega\right) = 10\cdot\left(2\cdot 16 + 19\cdot 2\right) = 10\cdot(32 + 38) = 10\cdot 70 = 700$ καθίσματα

δ) Το πλήθος των κενών καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου γιατί κάθε σειρά έχει 3 περισσότερα καθίσματα από την προηγούμενη της.
Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (β_ν) του πλήθους των κενών καθισμάτων κάθε σειράς με πρώτο όρο $\beta_1 = 6$ και $\omega' = 3$ καθίσματα

i) $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\cdot\omega' = 6 + (\nu - 1)\cdot 3 = 6 + 3\nu - 3 = 3\nu + 3$

Ισχύει $\beta_\nu \le \alpha_\nu \Leftrightarrow 3\nu + 3 \le 2\nu + 14 \Leftrightarrow \nu \le 11$
Το πλήθος των κενών καθισμάτων δεν μπορεί να υπερβαίνει το πλήθος των καθισμάτων της ίδιας σειράς.
Θα υπάρχουν κενά καθίσματα από την 11η σειρά και πάνω ($\nu = 11 \Leftrightarrow \alpha_\nu = \beta_\nu$)

ii) Αν S'_{10} το σύνολο των κενών καθισμάτων των πρώτων 10 σειρών της αίθουσας τότε :

$S'_{10} = \frac{10}{2}\left(2\beta_1 + 9\omega'\right) = 5\cdot(2\cdot 6 + 9\cdot 3) = 5\cdot(12 + 27) = 195$ καθίσματα

$S_{10} = \frac{10}{2}\left(2\alpha_1 + 9\omega\right) = 5\cdot(2\cdot 16 + 9\cdot 2) = 5\cdot(32 + 18) = 250$ καθίσματα

Οι θεατές βρίσκονται από τη διαφορά $S_{10} - S'_{10} = 250 - 195 = 55$ θεατές

1395.Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των21€ανάεισιτήριο,τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει51θέσεις.
Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€καικάθεεπόμενοςεπιβάτηςθαπληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.
α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. (Μονάδες 4)
β) Αν για κάθε ν≤51 ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου. (Μονάδες 6)
γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης. (Μονάδες7)
δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$) (Μονάδες 8)

Λύση

α) Ο δεύτερος επιβάτης θα πληρώσει 3+0,5=3,5€
ο τρίτος επιβάτης θα πληρώσει 3,5+0,5=4€
ο τέταρτος επιβάτης θα πληρώσει 4+0,5=4,5€

β) Επειδή το ποσό που πληρώνει κάθε επιβάτης είναι κατά 0,5 € περισσότερο από τον προηγούμενο η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με α_1=3€ και διαφορά ω=0,5€

γ) Το ποσό πουθαπληρώσειο$51^{ος}$ επιβάτης είναι $\alpha_{51} = \alpha_1 + 50\omega = 3 + 50\cdot 0{,}5 = 28€$

δ) Έστω ότι πρέπει να πουλήσει ν εισιτήρια .Τότε η είσπραξη θα είναι S_ν €.

Οπότε : $S_\nu > 30\cdot 21 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\cdot\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right] > 630 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\cdot\left[2\cdot 3+(\nu-1)\cdot 0,5\right] > 630 \overset{(\cdot 4)}{\Leftrightarrow}$

$2\nu\cdot\left(6+0,5\nu-0,5\right) > 2520 \Leftrightarrow 12\nu+\nu^2-\nu-2520>0 \Leftrightarrow \nu^2+11\nu-2520>0\,(1)$

Η διακρίνουσα είναι : $\Delta = 11^2-4\cdot 1\cdot(-2520) = 121+10080 = 10201$

Έχει ρίζες : $\nu = \frac{-11+\sqrt{10201}}{2} = \frac{-11+101}{2} = \frac{90}{2} = 45$ και

$\nu = \frac{-11-\sqrt{10201}}{2} = \frac{-11-101}{2} = \frac{-112}{2} = -56$

Από την (1) $\Rightarrow (\nu-45)(\nu+56)>0 \overset{\nu+56>0}{\Leftrightarrow} \nu-45>0 \Leftrightarrow \nu>45$

Θα πρέπει να βγάλει τουλάχιστον 46 εισιτήρια ώστε να συμφέρει η προσφορά.

1399. Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν) ,όπου $\nu\in N^*$. Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι: $\alpha_1=x$, $\alpha_2 = 2x^2-3x-4$, $a_3 = x^2-2$,όπου $x\in Z$, τότε :

α) να αποδειχθεί ότι x=3. **(Μονάδες10)**

β)να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 . **(Μονάδες 8)**

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots+\alpha_{15}$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Επειδή $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου :

$2\alpha_2 = \alpha_1+\alpha_3 \Leftrightarrow 2(2x^2-3x-4) = x+x^2-2 \Leftrightarrow 4x^2-6x-8-x-x^2+2=0 \Leftrightarrow 3x^2-7x-6=0$

Η διακρίνουσα είναι : $\Delta = (-7)^2-4\cdot 3\cdot(-6) = 49+72 = 121 = 11^2$

Οι ρίζες είναι : $x_1 = \frac{7+11}{2\cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$, $x_2 = \frac{7-11}{2\cdot 3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \notin Z$ απορρίπτεται

Επομένως x=3.

β) $\alpha_1=3,\alpha_2=5,\alpha_3=7$ και $\omega=\alpha_2-\alpha_1=5-3=2$

$\alpha_\nu = \alpha_1+(\nu-1)\omega = 3+(\nu-1)\cdot 2 = 3+2\nu-2 = 2\nu+1$

$\alpha_\nu = 2014 \Leftrightarrow 2\nu+1=2014 \Leftrightarrow 2\nu = 2013$ άτοπο (άρτιος =περιττός)

Επομένως δεν υπάρχει όρος της προόδουπουναισούταιμε2014

γ) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5,\ldots,\alpha_{15} = 3,7,11,\ldots,31$

Έστω η αριθμητική πρόοδος β_ν ,με $\beta_1=\alpha_1=3$,$(\beta_2=7)$ και $\omega' = \beta_2-\beta_1 = \alpha_3-\alpha_1 = 7-3 = 4$

$\beta_\nu = \beta_1+(\nu-1)\omega' \Leftrightarrow \alpha_{15} = 3+(\nu-1)\cdot 4 \Leftrightarrow 31 = 3+4\nu-4 \Leftrightarrow 4\nu = 32 \Leftrightarrow \nu = 8$

$S = \alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots+\alpha_{15} = \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_8 \Leftrightarrow S_8 = \frac{8}{2}\cdot(\beta_1+\beta_8) \Leftrightarrow S_8 = 4\cdot(3+31) \Leftrightarrow S_8 = 4\cdot 34 = 136$

Άρα S=136

Askisopolis

1411.Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το ν^{ο} όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

Λύση

α) Κάθε κυψέλη απέχει από την προηγούμενη απόσταση 3.Άρα οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ο πρώτος όρος παριστάνει την απόσταση της 1ης κυψέλης από την αποθήκη και η διαφορά την απόσταση των κυψελών μεταξύ τους.

Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1+(\nu-1)\cdot 3 = 1+3\nu-3 = 3\nu-2$

β) Η ζητούμενη απόσταση είναι ο όρος α_{20} με $\alpha_{20} = 3\cdot 20 - 2 = 58\,\text{m}$

γ) i) Η απόσταση που θα κάνει για να πάει σε κάθε κυψέλη και να επιστρέψει στην 1η αποθήκη είναι $2\alpha_\nu$, οπότε για να συλλέξει το μέλι από την Τρίτη κυψέλη η απόσταση που θα κάνει είναι

$2\alpha_3 = 2(3\cdot 3-2) = 14$ μέτρα

ii) $2(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{20}) = 2S_{20} = \not{2}\cdot\frac{20}{\not{2}}(2\alpha_1+19\omega) = 10(2\cdot 1+19\cdot 3) = 20(2+57) = 20\cdot 59 = 1180\text{m}$

1417.Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Αφού τα καθίσματα από σειρά σε σειρά αυξάνονται κατά δύο, τότε έχουμε αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 12$ και διαφορά $\omega = 2$.

Οι σειρές του σταδίου είναι 25 (περιττός) άρα υπάρχει μεσαία σειρά και είναι η $\alpha_{\frac{25+1}{2}} = \alpha_{13}$.

Θα βρούμε πόσα καθίσματα έχει η α_{13} και η τελευταία δηλαδή η α_{25}.

$\alpha_{13} = \alpha_1 + 12\omega = 12+12\cdot 2 = 12+24 = 36$. Άρα η μεσαία σειρά έχει 36 καθίσματα .

$\alpha_{25} = \alpha_1 + 24\omega = 12+24\cdot 2 = 12+48 = 60$

Επομένως η τελευταία σειρά έχει 60 καθίσματα .

β) Για να βρω τη χωρητικότητα του σταδίου θα προσθέσω τα καθίσματα και των 25 σειρών , δηλαδή $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{25} = S_{25}$.

$S_{25}=\frac{25}{2}\left(2\alpha_1+24\omega\right)=\frac{25}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\cdot 12+24\cdot\cancel{2}\right)=25\cdot 36=900$ θέσεις έχει το στάδιο .

γ) Το πλήθος των καθισμάτων από την 7η έως την 14η σειρά δίνεται από το άθροισμα: $\alpha_7+\alpha_8+\ldots+\alpha_{14}=S_{14}-S_6$

$S_{14}=\frac{14}{2}\left(2\alpha_1+13\omega\right)=7\left(2\cdot 12+13\cdot 2\right)=7(24+26)=350$ θέσεις έχουν οι 14 πρώτες σειρές .

$S_6=\frac{6}{2}\left(2\alpha_1+5\omega\right)=3\left(2\cdot 12+5\cdot 2\right)=3(24+10)=102$ θέσεις έχουν οι 6 πρώτες σειρές .

Άρα Το πλήθος των καθισμάτων από την 7η έως την 14η σειρά είναι

$S_{14}-S_6=350-102=248$. Άρα το Λύκειο έχει 248 μαθητές .

1430.Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.
α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)
β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)
γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Ναι γιατί κάθε αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενο όταν προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό (4).Έχει πρώτο όρο τον αριθμό $\alpha_1=3$ και διαφορά $\omega=4$

β) $S_{40}=\frac{40}{2}\cdot\left(2\alpha_1+39\omega\right)=20\cdot(2\cdot 3+39\cdot 4)=20\cdot(6+156)=20\cdot 162=3240$

γ) $\alpha_\nu=120\Leftrightarrow\alpha_1+(\nu-1)\omega=120\Leftrightarrow 3+(\nu-1)4=120\Leftrightarrow$

$3+4\nu-4=120\Leftrightarrow 4\nu-1=120\Leftrightarrow 4\nu=121\Leftrightarrow\nu=\frac{121}{4}\notin\{1,2,3,...,40\}$

Άρα ο αριθμός 120 δεν ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς.

δ) $\alpha_\nu=235\Leftrightarrow\alpha_1+(\nu-1)\omega=235\Leftrightarrow 3+(\nu-1)4=235\Leftrightarrow$

$3+4\nu-4=235\Leftrightarrow 4\nu-1=235\Leftrightarrow 4\nu=236\Leftrightarrow\nu=\frac{236}{4}\Leftrightarrow\nu=59$

Ο Γιώργος έγραψε τους αριθμούς $\alpha_{41},\alpha_{42},\alpha_{43},\ldots,\alpha_{59}$

Θέλουμε το άθροισμα $S=\alpha_{41}+\alpha_{42}+\alpha_{43}+\ldots+\alpha_{64}=S_{59}-S_{40}$

$S_{59}=\frac{59}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\alpha_1+\overset{29}{\cancel{58}}\omega\right)=59\cdot\left(3+29\cdot 4\right)=59\cdot(3+116)=7021$

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι : $S=7021-3240=3781$

1471.Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2=\kappa^2$ και $\alpha_3=(\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa>1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός. (Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1=2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega=7$. (Μονάδες 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $\omega=(\kappa+1)^2-\kappa^2=(\cancel{\kappa}+1\cancel{-\kappa})\cdot(\kappa+1+\kappa)=2\kappa+1$ περιττός

β) i) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Άρα

$2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3\Leftrightarrow 2\kappa^2=2+(\kappa+1)^2\Leftrightarrow 2\kappa^2=2+\kappa^2+2\kappa+1\Leftrightarrow$

$\kappa^2-2\kappa-3=0\Leftrightarrow \kappa=-1$ απορρίπτεται$(\kappa>1)$ ή $\kappa=3$

Άρα $\omega=2\cdot 3+1=7$

ii) $\alpha_\nu=1017\Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega=1017\Leftrightarrow 2+(\nu-1)\cdot 7=1017\Leftrightarrow$

$2+7\nu-7=1017\Leftrightarrow 7\nu=1022\Leftrightarrow \nu=\dfrac{1022}{7}=146$

Άρα ο όρος 1007 είναι ο 146ος όρος της προόδου.

1488. Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:
«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με x - 1 μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε x+3 σειρές με x-3 μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές. (Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Το πλήθος των μαθητών είναι από το πρώτο δεδομένο $x(x-1)$ μαθητές.

Από το δεύτερο δεδομένο είναι $(x-3)(x+3)-1$ μαθητές. Άρα :

$x(x-1)=(x-3)(x+3)-1\Leftrightarrow \cancel{x^2}-x=\cancel{x^2}-9-1\Leftrightarrow -x=-10\Leftrightarrow x=10$

β) Έχει $10\cdot(10-1)=10\cdot 9=90$ μαθητές

γ) Κάθε ομάδα έχει 2 παραπάνω μαθητές από την προηγούμενη ομάδα. Άρα το πλήθος μαθητών κάθε ομάδας είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=2$ και $\alpha_1=2$

Το άθροισμα των μαθητών όλων των ομάδων είναι ίσο με 90 .

$S_\nu=90\Leftrightarrow \dfrac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right]=90\Leftrightarrow \dfrac{\nu}{\cancel{2}}\left[2\cdot\cancel{2}+(\nu-1)\cdot\cancel{2}\right]=90\Leftrightarrow$

$2\nu+\nu^2-\nu=90\Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0\Leftrightarrow \nu=9$ ή $\nu=-10$ απορρίπτεται $(\nu\geq 1)$

$(\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-90) = 1 + 360 = 361 = 19^2$

$\nu = \frac{-1+19}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ή $\nu = \frac{-1-19}{2} = \frac{-20}{2} = -10$). Άρα θα δημιουργηθούν 9 ομάδες εργασίας.

1502.Οι αριθμοί : x^2+5, x^2+x, $2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x. **(Μονάδες 6)**

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. **(Μονάδες 5)**

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. **(Μονάδες 6)**

iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \ldots + \alpha_{24}$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου έχουμε :

$2(x^2+x) = x^2+5+2x+4 \Leftrightarrow 2x^2 \cancel{+2x} - x^2 - 5 \cancel{-2x} - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

β) Για $x=3$: Οι αριθμοί που δίνονται είναι οι : $\alpha_4 = 3^2+5 = 14$, $\alpha_5 = 3^2+3 = 12$, $\alpha_6 = 2\cdot 3+4 = 10$

i) Η διαφορά $\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 12-14 = -2$

ii) $\alpha_4 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\cdot(-2) = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 - 6 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20$

iii) $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \ldots + \alpha_{24} = S_{24} - S_{14} = -72 - 98 = -170$

$S_{24} = \frac{24}{2}(2\alpha_1 + 23\omega) = 12[2\cdot 20 + 23\cdot(-2)] = 12\cdot(40-46) = -72$

$S_{14} = \frac{14}{2}(2\alpha_1 + 13\omega) = 7[2\cdot 20 + 13\cdot(-2)] = 7\cdot(40-26) = 98$

1503.Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$. **(Μονάδες 9)**

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της. **(Μονάδες 6)**

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31)$ **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8$ (1) και $\alpha_8 = 23 \Leftrightarrow \alpha_1 + 7\omega = 23$ (2).

$(2)-(1) \Rightarrow 5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3$, $(1) \overset{\omega=3}{\Rightarrow} \alpha_1 + 6 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$

β) $\alpha_{31} = \alpha_1 + 30\cdot\omega = 2 + 30\cdot 3 = 2 + 90 = 92$

γ) $S = (\alpha_1+1) + (\alpha_2+2) + (\alpha_3+3) + \ldots + (\alpha_{31}+31) \Leftrightarrow$

$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_{31} + 1 + 2 + 3 + \ldots + 31 = S_{31} + S'_{31} = 1457 + 496 = 1953$

$S_{31} = \frac{31}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\alpha_1 + \overset{15}{\cancel{30}}\cdot\omega\right) = 31\cdot(2 + 15\cdot 3) = 31\cdot 47 = 1457$

Θεωρώ την αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1=1$ και $\omega'=1$ $(1,2,3,\ldots\nu)$

Τότε : $1+2+3+\ldots+31=S'_{31}=\frac{31}{2}(2\beta_1+30\omega')=31\cdot(1+15)=31\cdot16=496$

1507.Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3=10$ και $\alpha_{20}=61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. **(Μονάδες 8)**

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. **(Μονάδες 8)**

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιο ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $\alpha_3=8\Leftrightarrow\alpha_1+2\omega=8$ (1) και $\alpha_8=23\Leftrightarrow\alpha_1+7\omega=23$ (2).

$(2)-(1)\Rightarrow5\omega=15\Leftrightarrow\omega=3$, $(1)\overset{\omega=3}{\Rightarrow}\alpha_1+6=8\Leftrightarrow\alpha_1=2$

β) $\alpha_\nu=333\Leftrightarrow10+(\nu-1)\cdot3=333\Leftrightarrow10+3\nu-3=333\Leftrightarrow3\nu=326\Leftrightarrow\nu=\frac{326}{3}$

Επειδή το $\frac{326}{3}$ δεν είναι φυσικός αριθμός, δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 333.

γ) $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ldots+(\alpha_{31}+31)\Leftrightarrow$

$S=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\alpha_{31}+1+2+3+\ldots+31=S_{31}+S'_{31}=1457+496=1953$

$S_{31}=\frac{31}{2}\left(2\alpha_1+30\cdot\omega\right)=31\cdot(2+15\cdot3)=31\cdot47=1457$

Θεωρώ την αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1=1$ και $\omega'=1$ $(1,2,3,\ldots\nu)$

Τότε : $1+2+3+\ldots+31=S'_{31}=\frac{31}{2}(2\beta_1+30\omega')=31\cdot(1+15)=31\cdot16=496$

12694. Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος; **(Μονάδες 3 + 4)**

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι. **(Μονάδες 6)**

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι. **(Μονάδες 6)**

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι; **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Το χρονικό όριο του επιπέδου 1 είναι $\alpha_1=300$ δευτερόλεπτα και του επιπέδου 4 είναι $\alpha_4=255$ δευτερόλεπτα. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο γενικός όρος δίνεται από τη σχέση: $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, οπότε $\alpha_4=\alpha_1+3\omega$, δηλαδή $255=300+3\omega\Leftrightarrow\omega=-15$.

Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνει το επίπεδο δυσκολίας (από 1 σε 2, από 2 σε 3, από 3 σε 4, κ.ο.κ) το χρονικό όριο που έχει ο παίκτης για να το ολοκληρώσει ελαττώνεται (σταθερά) κατά 15 δευτερόλεπτα κάθε φορά.

β) Αν τα επίπεδα είναι στο σύνολό τους ν , τότε $\alpha_\nu = 45$(το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων) και ζητάμε την τιμή του ν . Άρα

$\alpha_\nu = 45 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 45 \Leftrightarrow 300 + (\nu-1)(-15) = 45 \Leftrightarrow 300 - 15\nu + 15 = 45 \Leftrightarrow 15\nu = 270 \Leftrightarrow \nu = 18$

Άρα το παιχνίδι ολοκληρώνεται σε 18 επίπεδα.

γ) Ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι θα προκύψει αν προσθέσουμε το μέγιστο χρονικό όριο και των 18 επιπέδων του παιχνιδιού, δηλαδή

$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{18} = S_{18}$. Στην αριθμητική πρόοδο ισχύει η σχέση: $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ οπότε

$S_{18} = \frac{18}{2}(\alpha_1 + \alpha_{18}) = 9(300 + 45) = 3105$. Ο μέγιστος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι είναι 3105 δευτερόλεπτα (δηλαδή 51 λεπτά και 45 δευτερόλεπτα).

δ) Αν $\beta_1 = 147$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει το επίπεδο 1, β_ν είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να ολοκληρώσει το επίπεδο ν, τότε β_ν είναι αριθμητική πρόοδος με $\beta_1 = 147$ και ω = 3. Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο κάθε επιπέδου.

Θέλουμε τη μέγιστη τιμή του $\nu \in \mathbb{N}$, ώστε $\beta_\nu \le \alpha_\nu \Leftrightarrow 147 + (\nu-1)\cdot 3 \le 300 + (\nu-1)(-15) \Leftrightarrow$

$144 + 3\nu - 3 \le 315 - 15\nu \Leftrightarrow 18\nu \le 174 \Leftrightarrow \nu \le \frac{174}{18} = 9,7$

Άρα η μέγιστη τιμή του ν είναι 9, που σημαίνει ότι ο παίκτης, με το ρυθμό που παίζει, θα ολοκληρώσει μόνο 9 από τα 18 επίπεδα του παιχνιδιού.

13171.Το άθροισμα των *ν* πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \ge 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. **(Μονάδες 5)**

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1$, $\nu \ge 2$. **(Μονάδες 6)**

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1$, $\nu \ge 1$. **(Μονάδες 7)**

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Είναι $S_\nu = \alpha_1$, όμως $S_1 = 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 = 5$, άρα $\alpha_1 = 5$.

β) Είναι $S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu$ για κάθε $\nu \ge 1$, οπότε θέτοντας όπου ν το ν-1, έχουμε

$S_{\nu-1} = 2(\nu-1)^2 + 3(\nu-1) = 2(\nu^2 - 2\nu + 1) + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - 4\nu + 2 + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - \nu - 1$ με $\nu - 1 \ge 1 \Leftrightarrow \nu \ge 2$

γ) Είναι $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu = S_\nu$ και $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{\nu-1} = S_{\nu-1}$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$\alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu^2 + 3\nu - (2\nu^2 - \nu - 1) = \cancel{2\nu^2} + 3\nu - \cancel{2\nu^2} + \nu + 1 = 4\nu + 1$ για κάθε $\nu \ge 2$.

Επειδή $\alpha_1 = 5 = 4\cdot 1 + 1$, τελικά είναι $\alpha_\nu = 4\nu + 1$ για κάθε $\nu \ge 1$.

δ) Για να είναι η ακολουθία (α_ν) αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων να είναι σταθερή. Είναι

$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=4(\nu+1)+1-(4\nu+1)=4\nu+4+1-4\nu-1=4$, άρα $\omega=4$.

13089.Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α) i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο. (Μονάδες 5)

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_\nu=\beta_{8-\nu}$ για κάθε ν =1, 2,..., 7 . (Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, μετά τον 1ο, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 2. Είναι $\alpha_1=1$ και $\omega=2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι
$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega=1+(\nu-1)\cdot 2=1+2\nu-2=2\nu-1$

ii. Η ακολουθία (β_ν) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της μετά τον 1ο, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού -2. Είναι $\beta_1=13$ και $\omega=-2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι
$\beta_\nu=\beta_1+(\nu-1)\omega=13+(\nu-1)\cdot(-2)=13-2\nu+2=15-2\nu$

β) Έστω ότι διάβασε το βιβλίο σε ν ημέρες. Τότε την πρώτη φορά διάβασε
$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)=\frac{\nu}{2}(1+2\nu-1)=\nu^2$ σελίδες

Την δεύτερη φορά διάβασε $\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu=S_\nu=\frac{\nu}{2}(\beta_1+\beta_\nu)=\frac{\nu}{2}(13+15-2\nu)=14\nu-\nu^2$ σελίδες

Όμως και τις δύο φορές διάβασε όλο το βιβλίο, άρα
$\nu^2=14\nu-\nu^2\Leftrightarrow 2\nu^2-14\nu=0\Leftrightarrow 2\nu(\nu-7)=0\Leftrightarrow \nu=0$ απορρίπτεται ή ν = 7ημέρες.

γ) Το πλήθος των σελίδων του βιβλίου είναι $S_7=7^2=49$.

δ) $\beta_{8-\nu}=15-2(8-\nu)=15-16+2\nu=2\nu-1=\alpha_\nu$

13173.Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό τύπο $\alpha_\nu=10+3\nu$.

α) i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 3)

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_ν) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί; (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. (Μονάδες 8)

Λύση

α) i. $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=10+3(\nu+1)-(10+3\nu)=10+3\nu+3-10-3\nu=3$, δηλαδή η διαφορά δυο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της είναι σταθερή και ίση με 3, οπότε είναι αριθμητική πρόοδος με ω = 3.

ii. Είναι ω = 3 και $\alpha_1=10+3=13$

β) $14<\alpha_\nu<401\Leftrightarrow 14<10+3\nu<401\Leftrightarrow 4<3\nu<391\Leftrightarrow \frac{4}{3}<\nu<\frac{391}{3}$

Επειδή $\frac{4}{3}=1,333...$ και $\frac{391}{3}=130,333...$ οι όροι της αριθμητικής προόδου που είναι μεταξύ των αριθμών 14 και 401, είναι οι $\alpha_2,...,\alpha_{130}$. Επειδή από το 1 έως το 130 είναι 130 αριθμοί, από το 2 έως το 130 είναι 129 όροι.

γ) $\alpha_2+...+\alpha_{130}=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{130}-\alpha_1=S_{130}-\alpha_1=\frac{130}{2}\left[2\cdot 13+(130-1)\cdot 3\right]+13=$

$65(26+387)+13=26.858$

12764.Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_ν το πλήθος των καθισμάτων της ν - οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα. (Μονάδες 9)

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Ισχύει ότι $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω=2.

Σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύει ότι: $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, οπότε

$\alpha_{10}=\alpha_1+(10-1)\omega\Leftrightarrow 50=\alpha_1+9\cdot 2\Leftrightarrow \alpha_1=50-18=32$.

Συνεπώς ισχύει ότι α_1 = 32 και ω=2.

β) Είναι $S_\nu=\frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]$, οπότε $S_{40}=\frac{40}{2}\left[2\cdot 32+(40-1)\cdot 2\right]=20\cdot 142=2.840$

Συνεπώς, το σύνολο των καθισμάτων της κερκίδας είναι 2.840.

γ) Η 1η σειρά καθισμάτων έχει 32 καθίσματα, η 2η 34 και η 3η 36. Αν οι θεατές μπορούν να καθίσουν μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων, τότε δημιουργείται μία αριθμητική πρόοδος με $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_3,...$

Είναι $\beta_2-\beta_1=\alpha_3-\alpha_1=4$, οπότε είναι αριθμητική πρόοδος με $\beta_1=32$ και διαφορά ω΄= 4.

Το πλήθος των όρων αυτής της αριθμητικής προόδου που πρέπει να καταμετρηθεί είναι οι 20 πρώτοι όροι, καθώς σε 40 σειρές καθισμάτων οι μισές θα είναι περιττές. Οπότε το πλήθος των θεατών που μπορούν να καθίσουν στην κερκίδα είναι: $S_{20}=\frac{20}{2}\left[2\cdot 32+(20-1)\cdot 4\right]=10\cdot 140=1.400$

12945.Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56 .

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. **(Μονάδες 7)**

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο. **(Μονάδες 8)**

γ) Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Είναι $\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8\ (1)$ και $\alpha_{11} = 32 \Leftrightarrow \alpha_1 + 10\omega = 32$ (2).
Αν από την (2) αφαιρέσουμε την (1) προκύπτει: $8\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 3$ και με αντικατάσταση στην $(1) \Rightarrow \alpha_1 + 2\cdot 3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$.

β) Η πρόοδος (β_ν) έχει πρώτο όρο $\beta_1 = 57$ και διαφορά $\omega' = 2$ οπότε $\beta_2 = \beta_1 + \omega' = 57 + 2 = 59$.
Είναι $\alpha_\nu = \beta_2 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 59 \Leftrightarrow 2 + 3(\nu-1) = 59 \Leftrightarrow 2 + 3\nu - 3 = 59 \Leftrightarrow 3\nu = 60 \Leftrightarrow \nu = 20$
Επομένως ο εικοστός όρος της πρώτης προόδου είναι ίσος με τον δεύτερο όρο της δεύτερης.

γ) Το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της α_ν είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της β_ν, οπότε έχουμε: $\frac{2\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (2\nu-1)\omega\right] = \frac{\nu}{2}\left[2\beta_1 + (\nu-1)\omega'\right] \Leftrightarrow \cancel{\nu}\left(2\cdot 2 + 3(2\nu-1)\right) = \frac{\cancel{\nu}}{2}\left(2\cdot 57 + 2(\nu-1)\right) \Leftrightarrow$

$$4 + 6\nu - 3 = \frac{114 + 2\nu - 2}{2} \Leftrightarrow 2 + 12\nu = 112 + 2\nu \Leftrightarrow 10\nu = 110 \Leftrightarrow \nu = 11$$

14616.Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω για την οποία πρόοδο ισχύει η σχέση $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 40$, ενώ ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1$, όπου ν θετικός ακέραιος.

γ) Να βρείτε τον μικρότερο δυνατό όρο της προόδου, ο οποίος είναι μεγαλύτερος του αριθμού 1589.

δ) Έστω ν τυχαίος θετικός ακέραιος και $k = \nu(\nu+1)$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός α_κ είναι τετράγωνο θετικού ακέραιου.

Λύση

α) $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 + 19\omega - (\alpha_1 + 9\omega) = 40 \Leftrightarrow \cancel{\alpha_1} + 19\omega - \cancel{\alpha_1} - 9\omega = 40 \Leftrightarrow 10\omega = 40 \Leftrightarrow \omega = 4$.

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 5 + 4(\nu-1) = 5 + 4\nu - 4 = 4\nu + 1$

γ) Ζητάμε την ελάχιστη τιμή του φυσικού αριθμού ν για την οποία $\alpha_\nu > 1589$.
Είναι $\alpha_\nu > 1589 \Leftrightarrow 4\nu + 1 > 1589 \Leftrightarrow 4\nu > 1588 \Leftrightarrow \nu > 397$. Άρα η ελάχιστη τιμή του ν είναι 398 και ο ζητούμενος όρος είναι ο $\alpha_{398} = 4\cdot 398 + 1 = 1593$

δ) $\alpha_k = 4k + 1 = 4\nu(\nu+1) + 1 = 4\nu^2 + 4\nu + 1 = (2\nu+1)^2$

14809.Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ…

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23η φορά το γράμμα Β. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200η θέση στην παραπάνω διαδοχή. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Το γράμμα Β υπάρχει ακριβώς μια φορά στη λέξη «ΑΛΓΕΒΡΑ». Την πρώτη φορά που το συναντάμε είναι στην 5η θέση της διαδοχής και επειδή η λέξη έχει 7 γράμματα, η δεύτερη εμφάνιση του γράμματος Β είναι στην 12η θέση και κάθε εμφάνισή του είναι 7 θέσεις μετά την προηγούμενη.
Έτσι, η ακολουθία που σχηματίζουν οι θέσεις που συναντάμε το γράμμα Β είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 7$.

β) Αρκεί να βρούμε τον 23ο όρο της προόδου. Είναι: $\alpha_{23} = \alpha_1 + 22\omega = 5 + 22 \cdot 7 = 159$

γ) Αν διαιρέσουμε τον αριθμό 200 με το 7, βρίσκουμε πηλίκο 28 και υπόλοιπο 4, οπότε $200 = 7 \cdot 28 + 4$. Έτσι, μέχρι την 196η θέση έχουμε 28 φορές επανάληψη της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ» οπότε το γράμμα που βρίσκεται στην 200η θέση είναι το 4ο γράμμα της λέξης, δηλαδή είναι το γράμμα Ε.

14927.Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να δείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$. (1) (Μονάδες 9)

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1). (Μονάδες 5)

ii. της διαφοράς ω =107 της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, δηλαδή:
$\alpha_{50} = 6560 \Leftrightarrow \alpha_1 + 49\omega = 6560 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6560 - 49\omega$ (1).
Το κόστος για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ, δηλαδή:

$\alpha_{100} = 11910 \Leftrightarrow \alpha_1 + 99\omega = 11910 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 6560 - 49\omega + 99\omega = 11910 \Leftrightarrow$
$50\omega = 11910 - 6560 \Leftrightarrow 50\omega = 5350 \Leftrightarrow \omega = 107$. Τότε από τη σχέση (1) έχουμε:
$\alpha_1 = 6560 - 49 \cdot 107 = 6560 - 5243 = 1317$
Συνεπώς το κόστος για ν καλεσμένους είναι: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 1317 + 107(\nu - 1) = 107\nu + 1210$

β) i. Όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$ είναι το κόστος για ν καλεσμένους. Ακόμα και αν δεν εμφανιστεί καλεσμένος στο γάμο, ο χώρος δεξίωσης θα κοστίσει στους ενδιαφερόμενους 1210 ευρώ.

ii. Επειδή η διαφορά ω της προόδου είναι 107 ευρώ, κάθε φορά που το πλήθος των καλεσμένων αυξάνει κατά ένα άτομο το κόστος της δεξίωσης του γάμου θα αυξάνει κατά 107 ευρώ.

γ) Είναι $\alpha_{80} = 107 \cdot 80 + 1210 = 9770$ ευρώ.

14758.Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου; (Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια; (Μονάδες 6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250ο αυτοκίνητο; (Μονάδες 7)

Λύση

α) Στο τέλος του $1^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 5 αυτοκίνητα.
Στο τέλος του $2^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 18 αυτοκίνητα.
Στο τέλος του $3^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 31 αυτοκίνητα.
Στο τέλος του $4^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 44 αυτοκίνητα.
Στο τέλος του $5^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 57 αυτοκίνητα και στο τέλος του $6^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 70 αυτοκίνητα.

β) Τα αυτοκίνητα που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$ και διαφορά $\omega = 13$ (τα αυτοκίνητα που κατασκευάζονται κάθε μήνα αυξάνονται σταθερά κατά 13).

γ) Τα τέσσερα πρώτα χρόνια (στο τέλος του $48^{ου}$ μήνα δηλαδή) θα έχουν κατασκευαστεί:
$\alpha_{48} = \alpha_1 + 47\omega = 5 + 47 \cdot 13 = 616$ αυτοκίνητα.

δ) Ζητάμε τον φυσικό αριθμό ν για τον οποίο ισχύει: $\alpha_\nu \geq 250 \Leftrightarrow 5 + (\nu - 1) \cdot 13 \geq 250 \Leftrightarrow$

$13\nu - 13 \geq 245 \Leftrightarrow 13\nu \geq 258 \Leftrightarrow \nu \geq \frac{259}{13}$.

Επειδή $\frac{259}{13} \simeq 19,92$, μετά από 20 μήνες θα έχει κατασκευαστεί το $250^{ο}$ αυτοκίνητο.

Askisopolis

1ο θέμα

14935. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) , γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ **.**

ii. Αν $\rho>0$**, τότε ισχύει η ισοδυναμία:** $|x|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$ **.**

iii. Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$ **, με ν περιττό φυσικό και** $\alpha<0$**, έχει λύση την** $x=\sqrt[\nu]{|\alpha|}$ **.**

iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(3,5) ισχύει $f(5)=3$ **.**

v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2=\alpha\gamma$ **.**

(Μονάδες 10 (5 × 2))

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 **και διαφορά ω είναι:** $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$ **.** **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Λ iv. Λ v. Σ

β) Θεωρία § 5.2

Askisopolis

Γεωμετρική πρόοδος
2ο θέμα

1242.α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x,\ 2x+1,\ 5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x=1$ ii) $x=-1$ (Μονάδες 12)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$(2x+1)^2 = x\cdot(5x+4) \Leftrightarrow 4x^2 \cancel{+4x} +1 = 5x^2 \cancel{+4x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

β) i) Όταν $x=1$ έχουμε τους αριθμούς : 1,3,9 και ολόγος είναι : $\lambda = 3:1 = 3$

ii) Όταν $x=-1$ έχουμε τους αριθμούς : -1,-1,-1 και ολόγος είναι : $\lambda = (-1):(-1) = 1$

1257.α) Αν οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει : $2x = 2+4-x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,2,2 και η διαφορά είναι $\omega = 2-2 = 0$.

β) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$x^2 = 2\cdot(4-x) \Leftrightarrow x^2 = 8-2x \Leftrightarrow x^2+2x-8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -4$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,2,2 και ο λόγος είναι $\lambda = \frac{2}{2} = 1$ ή

τους αριθμούς : 8,-4,2 και ο λόγος είναι $\lambda = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

γ) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου ισχύει: $x = 2$.

1265.Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1,\ \beta,\ x_2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\Delta=(-5\beta)^2-4\cdot 2\cdot 2\beta^2=25\beta^2-16\beta^2=9\beta^2$, $x_1=\dfrac{5\beta+3\beta}{2\cdot 2}=\dfrac{8\beta}{4}=2\beta$ και $x_1=\dfrac{5\beta-3\beta}{2\cdot 2}=\dfrac{2\beta}{4}=\dfrac{\beta}{2}$

β) Για να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει : $\beta^2=x_1\cdot x_2$,το οποίο

ισχύει γιατί $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\not{2}\beta^2}{\not{2}}=\beta^2$ (Σχέσεις Vieta)

1311.Οι αριθμοί $\kappa-2$, 2κ και $7\kappa+4$, $\kappa\in\mathbb{N}$ είναι , με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=4$ και να βρείτε το λόγο της προόδου. **(Μονάδες12)**
β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1. **(Μονάδες 6)**
ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2+\alpha_5=4(\alpha_1+\alpha_4)$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$(2\kappa)^2=(\kappa-2)(7\kappa+4)\Leftrightarrow 4\kappa^2=7\kappa^2+4\kappa-14\kappa-8\Leftrightarrow 3\kappa^2-10\kappa-8=0$

$\Delta=(-10)^2-4\cdot 3\cdot(-8)=100+96=196=14^2$

$\kappa=\dfrac{10+14}{2\cdot 3}=\dfrac{24}{6}=4$ ή $\kappa=\dfrac{10-14}{2\cdot 3}=\dfrac{-4}{6}=-\dfrac{2}{3}\notin\mathbb{N}$ απορρίπτεται

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,8,32 και ο λόγος είναι $\lambda=8:2=4$

β) i) $\alpha_2=\alpha_1\cdot\lambda=4\alpha_1$, $\alpha_5=\alpha_1\cdot\lambda^4=\alpha_1\cdot 4^4=256\alpha_1$, $\alpha_4=\alpha_1\cdot\lambda^3=\alpha_1\cdot 4^3=64\alpha_1$

ii) $\alpha_2+\alpha_5=4\alpha_1+256\alpha_1=4(\alpha_1+256\alpha_1)=4(\alpha_1+\alpha_4)$

1321.α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
(Μονάδες 13)

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε
i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. **(Μονάδες 6)**
ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει :

$(2-x)^2=(x+4)(6-x)\Leftrightarrow 4\cancel{-4x}+x^2=6x-x^2+24\cancel{-4x}\Leftrightarrow$

$2x^2-6x-20=0\overset{(:2)}{\Leftrightarrow}x^2-3x-10=0\Leftrightarrow x=5$ ή $x=-2$

β) Για $x=5$ έχουμε τους αριθμούς : $9,-3,1=\alpha_4$ και

i) ο λόγος είναι $\lambda=\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}$

ii) $\alpha_4=\alpha_1\cdot\lambda^3\Leftrightarrow 1=\alpha_1\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3\Leftrightarrow 1=\alpha_1\cdot\left(-\dfrac{1}{27}\right)\Leftrightarrow\alpha_1=-27$

1339.Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2}=27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda=3$. **(Μονάδες 10)**

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $\frac{\alpha_5}{\alpha_2}=27\Leftrightarrow\frac{\alpha_1\cdot\lambda^4}{\alpha_1\cdot\lambda}=27\Leftrightarrow\lambda^3=27\Leftrightarrow\lambda=3$

β) $S_4=200\Leftrightarrow\alpha_1\frac{\lambda^4-1}{\lambda-1}=200\Leftrightarrow\alpha_1\frac{3^4-1}{3-1}=200\Leftrightarrow$

$\alpha_1\cdot\frac{81-1}{2}=200\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\frac{80}{2}=200\Leftrightarrow40\alpha_1=200\Leftrightarrow\alpha_1=5$

1360.Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο, ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο της προόδου και τον πρώτο όρο της. **(Μονάδες13)**

β)Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu=2^{\nu-3}$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $\alpha_3=1\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\lambda^2=1$ (1), $\alpha_5=4\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\lambda^4=4$ (2)

$\frac{(2)}{(1)}\Rightarrow\frac{\alpha_1\cdot\lambda^4}{\alpha_1\cdot\lambda^2}=\frac{4}{1}\Leftrightarrow\lambda^2=4\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}\lambda=2$, $(1)\Rightarrow\alpha_1\cdot2^2=1\Leftrightarrow\alpha_1\cdot4=1\Leftrightarrow\alpha_1=\frac{1}{4}$

β) $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=\frac{1}{4}\cdot2^{\nu-1}=\frac{1}{2^2}\cdot2^{\nu-1}=2^{\nu-3}$

12787.α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-x-6=0$. **(Μονάδες 10)**

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa-2,\kappa,2\kappa+3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)=25$ και ρίζες

$x_1=\frac{1+\sqrt{25}}{2}=3$, $x_2=\frac{1-\sqrt{25}}{2}=-2$

β) Οι αριθμοί $\kappa-2,\kappa,2\kappa+3$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν

$\kappa^2=(\kappa-2)(2\kappa+3)\Leftrightarrow\kappa^2=2\kappa^2+3\kappa-4\kappa-6\Leftrightarrow0=2\kappa^2-\kappa^2-\kappa-6\Leftrightarrow\kappa^2-\kappa-6=0$

και από το α ερώτημα προκύπτει ότι κ = 3 ή κ = - 2. Όμως κ > 0, άρα κ = 3.

12763.Δίνεται μια πρόοδος α_v με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, ...$

α) Να εξετάσετε αν η α_v είναι αριθμητική πρόοδος. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η α_v είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το ν-οστό της όρο. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$. Επομένως οι αριθμοί $2, 2\sqrt{2}, 4$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν $2\sqrt{2} = \frac{2+4}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} = 3$ που είναι άτοπο. Άρα η α_v δεν είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Είναι $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 2\sqrt{2},\ \alpha_3 = 4,\ \alpha_4 = 4\sqrt{2}, \ldots$.

Είναι $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$, οπότε αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = \sqrt{2}$.

Είναι $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{v-1}$

13319.Δίνονται οι αριθμοί $1-x, \frac{x}{2}, 2x-1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του x, αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Οι αριθμοί $1-x, \frac{x}{2}, 2x-1$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν $\frac{x}{2} = \frac{1-x+2x-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $\frac{x}{2} = 1-x+5 \Leftrightarrow x = 2-2x+10 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

4ο θέμα

1392.Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ., στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ηςημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.; (Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Επειδή η επιφάνεια που καλύπτει στη θάλασσα το πετρέλαιο κάθε μέρα είναι διπλάσια από την προηγούμενη ημέρα, οι αριθμοί 3, 6, 12,… που είναι τα

τετραγωνικά που καλύπτει το πετρέλαιο είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = 2$.

Στο τέλος της 5ης ημέρας η επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο

είναι $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 3 \cdot 2^4 = 48$ τ.μ.

β) $\alpha_\nu = 768 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{\nu-1} = 768 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = \dfrac{768}{3} \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 2^8$, άρα $\nu - 1 = 8 \Leftrightarrow \nu = 9$.

Δηλαδή στο τέλος της 9ης ημέρας το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.

γ) Οι αριθμοί των τετραγωνικών μέτρων που δηλώνουν την επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο στη θάλασσα από το τέλος της 9ης ημέρας και μετά είναι:

$768, 762, 756, \ldots$ και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 762$ και $\omega = -6$

Έστω ότι τη ν–οστή ημέρα το πετρέλαιο καλύπτει 12 τ.μ. στη θάλασσα. Τότε

$\beta_\nu = 12 \Leftrightarrow \beta_1 + (\nu - 1)\omega = 12 \Leftrightarrow 762 - 6(\nu - 1) = 12 \Leftrightarrow 762 - 6\nu + 6 = 12 \Leftrightarrow$

$762 + 6 - 12 = 6\nu \Leftrightarrow 6\nu = 756 \Leftrightarrow \nu = \dfrac{756}{6} = 126$.

Συνεπώς στο τέλος της 126ης ημέρας μετά την κρατική παρέμβαση και συνολικά στο τέλος της 9 + 126 = 135ης ημέρας μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

1394.Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; **(Μονάδες6)**

β)Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. **(Μονάδες6)**

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν. **(Μονάδες6)**

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; **(Μονάδες7)**

Λύση

Επειδή ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε ώρα έχουμε γεωμετρική πρόοδο με

$\alpha_1 = 102400$ βακτήρια και $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

α) Μετά από 6 ώρες θα έχουμε $\alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 102400 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = 102400 \cdot \dfrac{1}{32} = 3200$ βακτήρια

β) i) Μετά από μία ώρα θα έχουμε $3200 \cdot 3 = 9600$ βακτήρια. Επειδή ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε να τριπλασιάζεται έχουμε γεωμετρική πρόοδο με $\beta_1 = 9600$ και λ=3

ii) $\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 9600 \cdot 3^{\nu-1}$

iii) $\beta_3 = \beta_1 \cdot \lambda^2 = 9600 \cdot 9 = 86400$ βακτήρια.

1435.Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:
Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.
Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ,
το 2ο μήνα 110ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον
προηγούμενο μήνα.
α) i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 4)
ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)
iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 5)
iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 5)
β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)
ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

Λύση

α) Το πρόγραμμα Α περιγράφει μία γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 1,\ \lambda = 2$
Το πρόγραμμα Β περιγράφει μία αριθμητική πρόοδο με $\beta_1=100$, $\omega=10$

i) $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 1 \cdot 2^{\nu-1} = 2^{\nu-1}$

ii) $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 100 + (\nu-1)\cdot 10 = 100 + 10\nu - 10 = 10\nu + 90$

iii) $A_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^\nu - 1}{2-1} = 2^\nu - 1$

iv) $B_\nu = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\nu = \frac{\nu}{2}(\beta_1 + \beta_\nu) = \frac{\nu}{2}(100 + 10\nu + 90) = \frac{\nu}{2}\left(\cancel{10}^{5}\nu + \cancel{190}^{95}\right) = 5\nu^2 + 95\nu$

β) i) $A_6 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ ευρώ (πρόγραμμα Α)

$B_6 = 5\cdot 6^2 + 95\cdot 6 = 180 + 570 = 750$ ευρώ (πρόγραμμα Β)

ii) $A_{12} = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4095$ ευρώ (πρόγραμμα Α)

$B_{12} = 5\cdot 12^2 + 95\cdot 12 = 720 + 1140 = 1860$ ευρώ (πρόγραμμα Β)

Με το πρόγραμμα Α θα συγκεντρωθεί μεγαλύτερο ποσό.

1498.Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι Ε=1 . **(Μονάδες 10)**

β) Αν α + β = 10 τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β. **(Μονάδες 5)**

ii) Να βρείτε τα μήκη α, β. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α και β έχει εμβαδόν Ε = αβ (1).
Οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει: $E^2 = \alpha\beta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} E^2 = E \overset{E>0}{\Leftrightarrow} E = 1$.

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε: $S = x_1 + x_2 = \alpha + \beta = 10$ και $P = x_1 x_2 = \alpha\beta = 1$
Η εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β είναι η: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0 \ (2)$

ii) Τα α, β είναι οι λύσεις της εξίσωσης (2). Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα: $\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 96$

και ρίζες $x_1 = \dfrac{10+\sqrt{96}}{2} = \dfrac{10+\sqrt{16\cdot 6}}{2} = \dfrac{10+4\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\cancel{2}\left(5+2\sqrt{6}\right)}{\cancel{2}} = 5+2\sqrt{6}$,

$x_2 = \dfrac{10-\sqrt{96}}{2} = \dfrac{10-4\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\cancel{2}\left(5-2\sqrt{6}\right)}{\cancel{2}} = 5-2\sqrt{6}$

Άρα $\alpha = 5+2\sqrt{6}$ και $\beta = 5-2\sqrt{6}$ ή $\alpha = 5-2\sqrt{6}$ και $\beta = 5+2\sqrt{6}$.

1499.Δίνονται οι αριθμοί 2, x, 8 με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8 , με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8 , με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; **(Μονάδες 5)**

γ) Αν (α_v) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (β_v) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, … τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_v των ν πρώτων όρων της (α_v). **(Μονάδες 7)**

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_v των ν πρώτων όρων της (α_v) να ισχύει: $2(S_v + 24) = \beta_7$ **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Αφού είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει :

$2x = 2+8 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,5,8 και η διαφορά είναι $\omega = 5-2 = 3$

β) Αφού είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει : $x^2 = 2\cdot 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 4$

Τότε έχουμε τους αριθμούς : 2,4,8 και ο λόγος είναι $\lambda = \dfrac{4}{2} = 2$

γ) i) $S_v = \dfrac{v}{2}\left[2\alpha_1 + (v-1)\omega\right] = \dfrac{v}{2}\left[2\cdot 2 + (v-1)3\right] = \dfrac{v}{2}\left(4+3v-3\right) = \dfrac{v}{2}(3v+1) = \dfrac{3v^2+v}{2}$

ii) $\beta_7 = \beta_1 \cdot \lambda^6 = 2\cdot 2^6 = 2^7 = 128$

$$2\left(S_\nu+24\right)=\beta_7 \Leftrightarrow 2\left(\frac{3\nu^2+\nu}{2}+24\right)=128 \Leftrightarrow 3\nu^2+\nu+48=128 \Leftrightarrow 3\nu^2+\nu-80=0$$

$$\Delta=1^2-4\cdot 3\cdot(-80)=1+960=961=31^2$$

$$\nu=\frac{-1+31}{2\cdot 3}=\frac{30}{6}=5 \text{ ή } \nu=\frac{-1-31}{2\cdot 3}=\frac{-32}{6}=-\frac{16}{3} \text{ απορρίπτεται } (\nu>0)$$

1519.Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $\alpha_3=4$, $\alpha_5=16$ και $\lambda>0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu=\frac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν)αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10}=\frac{1}{2^9}S_{10}$ (Μονάδες 8)

Λύση

α) $\alpha_3=4\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\lambda^2=4$ (1), $\alpha_5=16\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\lambda^4=16$ (2)

$$\frac{(2)}{(1)}\Rightarrow\frac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda^2}=\frac{16}{4}\Leftrightarrow\lambda^2=4\Leftrightarrow\lambda=2(\lambda>0),\ (1)\overset{(3)}{\Rightarrow}\alpha_1\cdot 2^2=4\Leftrightarrow\alpha_1\cdot 4=4\Leftrightarrow\alpha_1=1$$

β) $\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}=\frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}}=\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}=\frac{1}{\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}}=\frac{1}{2}$ Άρα η ακολουθία (β_ν)αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

γ) $\beta_1=\frac{1}{\alpha_1}=1$, $S_{10}=a_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1}=1\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1=1023$

$$S'_{10}=1\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{\frac{1}{2}-1}=1\cdot\frac{\frac{1}{2^{10}}-1}{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}=\frac{\frac{1-2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{2(1-2^{10})}{2^{10}}=-\frac{-1023}{2^9}=\frac{1023}{2^9}=\frac{1}{2^9}\cdot 1023=\frac{1}{2^9}\cdot S_{10}$$

12731.Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ $(\kappa\neq 0, \lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1)$.

Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa\cdot\lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός. (Μονάδες 10)

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa\cdot\lambda$, $(\kappa>0, \lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+10x+16=0$, να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa\cdot\lambda$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa\cdot\lambda$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν

$\kappa^2 = \frac{\kappa}{\lambda}\cdot(\kappa\cdot\lambda) \Leftrightarrow \kappa^2 = \frac{\kappa^2\cdot\lambda^2}{\lambda} \Leftrightarrow \kappa^2 = \kappa^2$ που ισχύει

β) Το άθροισμα των τριών αριθμών είναι: $\frac{\kappa}{\lambda}+\kappa+\kappa\cdot\lambda = \frac{\kappa}{\lambda}+\frac{\kappa\lambda}{\lambda}+\frac{\kappa\lambda^2}{\lambda} = \frac{\kappa+\kappa\lambda+\kappa\lambda^2}{\lambda} = \frac{\kappa\left(1+\lambda+\lambda^2\right)}{\lambda}$

Το τριώνυμο $\lambda^2+\lambda+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2-4\cdot1\cdot1 = -3<0$ άρα $\lambda^2+\lambda+1\neq0$ για κάθε τιμή του αριθμού λ. Επειδή $\kappa\neq0, \lambda\neq0$,είναι $\frac{\kappa\left(1+\lambda+\lambda^2\right)}{\lambda}\neq0$

γ) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 10^2-4\cdot1\cdot16 = 36$ και ρίζες

$x_1 = \frac{-10+\sqrt{36}}{2} = -2$, $x_2 == \frac{-10-\sqrt{36}}{2} = -8$. Άρα $\left(\frac{\kappa}{\lambda}=-2 \text{ και } \kappa\lambda=-8\right)$ ή $\left(\frac{\kappa}{\lambda}=-8 \text{ και } \kappa\lambda=-2\right)$

Αν $\frac{\kappa}{\lambda}=-2$ και $\kappa\lambda=-8$ τότε $\frac{\kappa}{\lambda}=-2\Leftrightarrow\kappa=-2\lambda$ και με αντικατάσταση στην $\kappa\lambda=-8$ προκύπτει:

$-2\lambda\cdot\lambda=-8\Leftrightarrow-2\lambda^2=-8\Leftrightarrow\lambda^2=4\Leftrightarrow\lambda=\pm2$

Αν $\lambda=2$ τότε $\kappa=-2\cdot2=-4$ και αν $\lambda=-2$ τότε $\kappa=-2\cdot(-2)=4$. Τότε οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa\cdot\lambda$ είναι οι -2, - 4, -8 ή -2, 4, -8.

Αν $\frac{\kappa}{\lambda}=-8$ και $\kappa\lambda=-2$ τότε $\frac{\kappa}{\lambda}=-8\Leftrightarrow\kappa=-8\lambda$ και με αντικατάσταση στην $\kappa\lambda=-2$ προκύπτει:

$-8\lambda\cdot\lambda=-2\Leftrightarrow-8\lambda^2=-2\Leftrightarrow\lambda^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\lambda=\pm\frac{1}{2}$

Αν $\lambda=\frac{1}{2}$ τότε $\kappa=-8\cdot\frac{1}{2}=-4$ κι αν $\lambda=-\frac{1}{2}$ τότε $\kappa=-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=4$

Τότε οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa\cdot\lambda$ είναι οι -8, -4, -2 ή -8, 4, -2.

12998.Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν): $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **(Μονάδες 5)**

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$ **(Μονάδες 5)**

β) Αν $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου. **(Μονάδες 7)**

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda=\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι ίσο με $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{11}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) i. Οι αριθμοί $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν

$\frac{81}{2}=\frac{\frac{81\sqrt{3}}{2}+\frac{27\sqrt{3}}{2}}{2}\Leftrightarrow 81=\frac{81\sqrt{3}}{2}+\frac{27\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 162=108\sqrt{3}$ που είναι αδύνατο, άρα δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2}=\frac{3^3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{3}\right)^2\right]^3\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^6\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$

β) Η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) έχει λόγο $\lambda=\frac{\frac{81}{2}}{\frac{27\sqrt{3}}{2}}=\frac{81^3}{27\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.Είναι

$\alpha_7=\frac{27\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \alpha_1\cdot\left(\sqrt{3}\right)^6=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7\Leftrightarrow \alpha_1=\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7}{\left(\sqrt{3}\right)^6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{\nu-1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^\nu$

γ) $S_{10}=\alpha_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{10}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{11}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}$

14375.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\mu x-2,\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x=-2$ και $x=3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, ενώ ο $x=1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$. **(Μονάδες 6)**

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2), f(1), f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ. **(Μονάδες 7)**

ii. Για $\mu=\frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Η f είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=\mu^2-4\cdot1\cdot(-2)=\mu^2+8>0$ άρα η f έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

β) Αν τα $x=-2$ και $x=3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, τότε $\left(f(-2)>0\Leftrightarrow 4+2\mu-2>0\Leftrightarrow 2\mu>-2\Leftrightarrow\mu>-1\,(1)\right)$ και

$\left(f(3)>0\Leftrightarrow 9-3\mu-2>0\Leftrightarrow -3\mu>-7\Leftrightarrow\mu<\frac{7}{3}\,(2)\right)$.

Επειδή ο $x=1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, είναι $f(1)<0\Leftrightarrow 1-\mu-2<0\Leftrightarrow\mu>-1$ (3)

Με συναλήθευση των (1),(2), (3) είναι $\mu\in\left(-1,\frac{7}{3}\right)$.

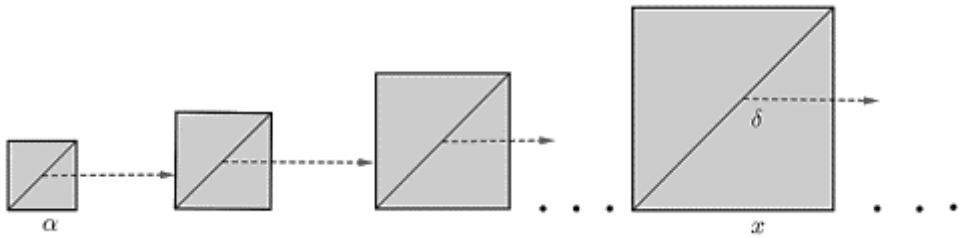
β) i. $f(-2)=2+2\mu,\ f(1)=-1-\mu,\ f(3)=7-3\mu$

Οι τιμές $f(-2), f(1), f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $f^2(1)=f(3)f(-2) \Leftrightarrow (-1-\mu)^2=(7-3\mu)(2+2\mu) \Leftrightarrow 1+2\mu+\mu^2=14+14\mu-6\mu-6\mu^2 \Leftrightarrow$ $7\mu^2-6\mu-13=0$. Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=400$ και ρίζες $\mu=-1, \mu=\frac{13}{7}$.

ii. Για $\mu=\frac{13}{7}$ είναι $f(-2)=2+2\cdot\frac{13}{7}=\frac{40}{7}$, $f(1)=-1-\frac{13}{7}=-\frac{20}{7}$

Είναι $\lambda=\frac{-\frac{20}{7}}{\frac{40}{7}}=-\frac{1}{2}$

14645.Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta=\sqrt{2}\cdot x$. **(Μονάδες 4)**

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda=2$ και γενικό όρο $\alpha_\nu=\alpha^2 2^{\nu-1}$. **(Μονάδες 7)**

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου. **(Μονάδες 8)**

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ.. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι για τη διαγώνιο δ ενός τετραγώνου πλευράς x ισχύει:
$\delta^2=x^2+x^2=2x^2 \Leftrightarrow \delta=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}\cdot x$.

ii. Από το ερώτημα α)i) προκύπτει ότι αν ένα από τα τετράγωνα της ακολουθίας έχει πλευρά χ το επόμενό του έχει πλευρά $\sqrt{2}\cdot x$ και τα αντίστοιχα εμβαδά είναι x^2 και $\left(\sqrt{2}\cdot x\right)^2=2x^2$. Άρα, ο λόγος λ των εμβαδών δύο διαδοχικών τετραγώνων δίνεται από τη σχέση $\lambda=\frac{2x^2}{x^2}=2$ και είναι σταθερός. Οπότε, τα εμβαδά των τετραγώνων είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda=2$ και πρώτο όρο $\alpha_1=\alpha^2$. Ο γενικός όρος της προόδου δίνεται από τη σχέση $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}=\alpha^2 2^{\nu-1}$.

β) Ισχύει ότι $\alpha_4=8 \Leftrightarrow \alpha^2 2^{4-1}=8 \Leftrightarrow 8\alpha^2=8 \Leftrightarrow \alpha^2=1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha=1$.

γ) Το άθροισμα των ν πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τη σχέση:
$S_\nu=\alpha_1\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}=1\cdot\frac{2^\nu-1}{2-1}=2^\nu-1$.
Για να είναι το συνολικό εμβαδών των αρχικών τετραγώνων ίσο με 255 τ.μ. πρέπει να ισχύει:
$S_\nu=255 \Leftrightarrow 2^\nu-1=255 \Leftrightarrow 2^\nu=256 \Leftrightarrow 2^\nu=2^8 \Leftrightarrow \nu=8$.
Άρα το πλήθος των τετραγώνων που έχουν συνολικό εμβαδόν 255τ.μ. είναι 8.

Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης

2ο θέμα

1244.Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ x-1, & x\geq 0\end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$ **(Μονάδες 13)**

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ **,ώστε** $f(x)=0$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $f(-1)=2(-1)+4=-2+4=2$ και $f(3)=3-1=2$, άρα $f(-1)=f(3)$.

β) Για $x<0$: $f(x)=0\Leftrightarrow 2x+4=0\Leftrightarrow 2x=-4\Leftrightarrow x=-2<0$ δεκτή

Για $x\geq 0$: $f(x)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1>0$ δεκτή

1255.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **(Μονάδες 15)**

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Πρέπει $x^2-x-6\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3$ και $x\neq -2$, άρα : $A_f=\mathbb{R}-\{-2,3\}$

β) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}=\dfrac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x+2)}(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$, $f(2)+f(4)=\dfrac{1}{2-3}+\dfrac{1}{4-3}=-1+1=0$

1263.Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: y=35+0,8x

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά; **(Μονάδες 12)**

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α; **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $y=35+0,8\cdot 25=35+20=55\,\text{km}$

β) $75=35+0,8x\Leftrightarrow 0,8x=40\Leftrightarrow x=50\,\text{min}$

1278.Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (˚C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: T=15+25·x, όταν 0≤x≤200.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 7)**

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290˚C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 10)**

Aksiopolis

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440˚C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Για να βρούμε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης θέτουμε στη δοθείσα σχέση x = 30 και βρίσκουμε ισοδύναμα: T = 15 + 25 · 30=15 + 750=765 0C

β) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι ίση με 290 0C θέτουμε στη δοθείσα σχέση T = 290 και βρίσκουμε ισοδύναμα:
290 = 15 + 25 · x ⇔ 275 = 25x ⇔ x = 11 χιλιόμετρα

γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440 °C λύνουμε την ανίσωση:

T > 440 ⇔ 15 + 25 · x > 440 ⇔ 25 · x > 425 ⇔ x > 17 χιλιόμετρα
Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη των 440 0C σε βάθος άνω των 17 χιλιομέτρων.

1283.Δίνεται η συνάρτηση f, με $\mathbf{f(x)=\begin{cases}8-x\,,\alpha\nu\ x<0\\ 2x+5,\alpha\nu\ x\geq 0\end{cases}}$ **.**

α) Να δείξετε ότι : $\mathbf{f(-5)=f(4)}$ **.** **(Μονάδες 13)**

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$**, ώστε** $\mathbf{f(x)=9}$ **.** **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $f(-5)=8-(-5)=8+5=13$, $f(4)=2\cdot 4+5=8+5=13$, άρα $f(-5)=f(4)$.

β) Για $x<0$: $f(x)=9\Leftrightarrow 8-x=9\Leftrightarrow x=-1<0$ δεκτή

Για $x\geq 0$: $f(x)=9\Leftrightarrow 2x+5=9\Leftrightarrow 2x=4\Leftrightarrow x=2<0$ δεκτή

1295.Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}}$ **.**

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $\mathbf{f(x)=x^2+4x}$**.** **(Μονάδες 15)**

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $\mathbf{f(x)=32}$ **.** **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Πρέπει $x-4\neq 0\Leftrightarrow x\neq 4$, άρα $A_f=\mathbb{R}-\{4\}$

$$f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}=\frac{x(x^2-16)}{x-4}=\frac{x\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}=x(x+4)=x^2+4x$$

β) $f(x)=32\Leftrightarrow x^2+4x=32\Leftrightarrow x^2+4x-32=0\Leftrightarrow x=-8(\text{δεκτή})\ \text{ή}\ x=4(\text{απορρίπτεται})$

1297.Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=x+\dfrac{1}{x},x\neq 0}$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathbf{A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)}$ **(Μονάδες 10)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{5}{2}$ **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}+1+\frac{1}{1}-\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+2+1+1-2-\frac{1}{2}=2$

β) $f(x)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\overset{(\cdot 2x)}{\Leftrightarrow}2x^2+2=5x\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9$, $x_1=\frac{5+3}{2\cdot 2}=\frac{8}{4}=2$ και $x_2=\frac{5-3}{2\cdot 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

1354.Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α. **(Μονάδες 5)**

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$ **(Μονάδες 10)**

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει : $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Πρέπει $x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq 1\Leftrightarrow x\neq\pm 1$.Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

β) $2x^2-5x+3$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1$

Οι ρίζες του είναι $x_1=\frac{5+1}{2\cdot 2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ και $x_2=\frac{5-1}{2\cdot 2}=\frac{4}{4}=1$

Άρα $2x^2-5x+3=2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x-1)(2x-3)$

γ) $f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}=\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x-3}{x+1}$

1372.Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\leq 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. **(Μονάδες 8)**

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $A_f=(-\infty,3]\cup(3,10)=(-\infty,10)$

β) $f(-1)=2(-1)-5=-7$, $f(3)=2\cdot 3-5=1$, $f(5)=5^2=25$

γ) Για $x \le 3$: $f(x)=25 \Leftrightarrow 2x-5=25 \Leftrightarrow 2x=30 \Leftrightarrow x=15$ απορρίπτεται

Για $3<x<10$: $f(x)=25 \Leftrightarrow x^2=25 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=5$ δεκτή (3<5<15)

1385.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6 . **(Μονάδες 12)**

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης. **(Μονάδες 5)**

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$. **(Μονάδες 8)**

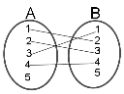
Λύση

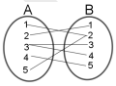
α) $\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1$, $x_1=\dfrac{5+1}{2}=3$, $x_2=\dfrac{5-1}{2}=2$. Άρα $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

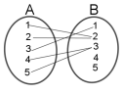
β) i) Πρέπει $x^2-5x+6\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ και $x\neq 3$, άρα $A=\mathbb{R}-\{2,3\}$

ii) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}=\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$

12908. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β.







α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το Α στο Β ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β. **(Μονάδες 9)**

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f. **(Μονάδες 4)**

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f. **(Μονάδες 4)**

iii. Να βρείτε τις τιμές f(1) και f(2). **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Η αντιστοιχία του Σχήματος 1 δεν παριστάνει συνάρτηση διότι το 5 του συνόλου Α δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του Β. Η αντιστοιχία του Σχήματος 2 δεν παριστάνει συνάρτηση γιατί το 3 του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου Β. Η αντιστοιχία του Σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση διότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

β) i. Το πεδίο ορισμού είναι το Α ={1,2,3,4,5}

ii. Το σύνολο τιμών είναι το f (A)={ 1,2,3 }.

iii. Είναι f (1) =f (2) = 2 .

12997.Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ λυκείου ενός Γενικού Λυκείου. Σχηματίζουμε τα σύνολα Α, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και Β με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α΄ τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου. Ορίζουμε την αντιστοίχιση f : Α→ Β σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την g: Β→ Α με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση f : Α→ Β ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β. (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση g:Β→Α αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο Β στο σύνολο Α και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Η αντιστοίχιση f : Α→Β δεν αποτελεί πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο Β, καθώς μπορεί να υπάρχουν μαθητές με το ίδιο όνομα και διαφορετικό επώνυμο. Δηλαδή να αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου Α σε περισσότερα από ένα στοιχεία του συνόλου Β.

β) Η αντιστοίχιση από το σύνολο Β στο σύνολο Α θα αποτελεί συνάρτηση, αν κάθε επώνυμο στο σύνολο Β αντιστοιχίζεται σε μοναδικό όνομα στο σύνολο Α, δηλαδή δεν υπάρχουν μαθητές με ίδιο επώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι το επώνυμο του μαθητή και η εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι το όνομά του.

13031.Δίνεται η συνάρτηση G με $G(x)=\dfrac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της G για $x=2$, $x=0$, $x=-\dfrac{1}{2}$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G, στο 3. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $G(2)=\dfrac{2\cdot 2+3}{2-4}=\dfrac{7}{-2}=-\dfrac{7}{2}$, $G(0)=\dfrac{2\cdot 0+3}{0-4}=\dfrac{3}{-4}=-\dfrac{3}{4}$ και $G\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3}{-\frac{1}{2}-4}=\dfrac{2}{-\frac{9}{2}}=-\dfrac{4}{9}$.

β) Η G δεν ορίζεται όταν $x-4=0\Leftrightarrow x=4$.

γ) Για $x\neq 4$ είναι $G(x)=3\Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x-4}=3\Leftrightarrow 2x+3=3x-12\Leftrightarrow 2x-3x=-12-3\Leftrightarrow -x=-15\Leftrightarrow x=15$

13032.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-3x$, $g(x)=\sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f(-1)=g(11)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε $f(x)=g(4)$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Η συνάρτηση f δεν έχει περιορισμούς οπότε $A_f=\mathbb{R}$.

Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει $x+5\geq 0\Leftrightarrow x\geq -5$ άρα $A_g=[-5,+\infty)$.

β) Είναι $f(-1)=1-3\cdot(-1)=1+3=4$ και $g(11)=\sqrt{11+5}=\sqrt{16}=4$ άρα $f(-1)=g(11)$.

γ) $f(x)=g(4)\Leftrightarrow 1-3x=\sqrt{4+5}\Leftrightarrow 1-3x=3\Leftrightarrow -3x=3-1\Leftrightarrow -3x=2\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

12765.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(Μονάδες 13)**

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1,\frac{\sqrt{2}}{2},6$ είναι αυτό δυνατό. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$, άρα $A_f=[2,+\infty)$.

β) Επειδή το – 1 δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f, δεν υπάρχει τιμή της f στο – 1.

Επειδή το $\frac{\sqrt{2}}{2}$ δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f, δεν υπάρχει τιμή της f στο $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Είναι $f(6)=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$.

13026.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος}\\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός}\end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$. **(Μονάδες 10)**

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2=4x-1$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Επειδή ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός, είναι $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$.

Επειδή ο $\frac{1}{2}$ είναι ρητός αριθμός, είναι $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}=1$.

β) Αν x ρητός τότε:

$[f(x)]^2=4x-1\Leftrightarrow (2x)^2=4x-1\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0\Leftrightarrow (2x-1)^2=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

14781.Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x\to y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2,-1,0,\frac{1}{2},1$ και 3.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x\to y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y\to x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 13)**

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x\to y$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) i. Η αντιστοίχιση $x\to$ y είναι συνάρτηση γιατί κάθε τιμή του x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή του y .

ii. Η αντιστοίχιση y→x δεν είναι συνάρτηση γιατί οι τιμές -6 του y αντιστοιχίζεται σε δύο τιμές του x.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=\left\{-2,-1,0,\frac{1}{2},1,3\right\}$ και το σύνολο τιμών της είναι το $B=\left\{-6,-4,0,-\frac{25}{4}\right\}$.

14681.Δίνεται η συνάρτηση: $\mathbf{f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0\\ 2x+2, & x\geq 0\end{cases}}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $\mathbf{f(3)}$ και $\mathbf{f(-3)}$. **(Μονάδες 12)**

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$ για τις οποίες ισχύει: $\mathbf{f(x)=8}$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $f(3)=2\cdot 3+2=6+2=8$ και $f(-3)=(-3)^2-1=9-1=8$

β) Για $x<0$ είναι $f(x)=8\Leftrightarrow x^2-1=8\Leftrightarrow x^2=9\overset{x<0}{\Leftrightarrow}x=-3$

Για $x\geq 0$ είναι $f(x)=8\Leftrightarrow 2x+2=8\Leftrightarrow 2x=6\Leftrightarrow x=3$

14728.Δίνεται η συνάρτηση: $\mathbf{f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $\mathbf{f(-1)}$ και $\mathbf{f(1)}$. **(Μονάδες 12)**

β) Για $\mathbf{x\geq 0}$ να λύσετε την ανίσωση: $\mathbf{f(x)\geq 2}$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $f(-1)=2(-1)-1=-2-1=-3$, $f(1)=1^2+1=1+1=2$.

β) Για κάθε $x\geq 0$ είναι $f(x)\geq 2\Leftrightarrow x^2+1\geq 2\Leftrightarrow x^2\geq 1\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}x\geq 1$.

4ο θέμα

1400. Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $\mathbf{K(x)=12,5x+120}$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $\mathbf{E(x)=15,5x}$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 6)**

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; **(Μονάδες 4)**

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) **(Μονάδες 6)**

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Τα πάγια έξοδα της επιχείρησης είναι $K(0)=120$ ευρώ , γιατί πρόκειται για το

κόστος της εταιρείας τους χωρίς καθόλου παραγωγή.

β) Επειδή τα πάγια έξοδα είναι 120 ευρώ και από την παραγωγή x μπλουζάκια, το κόστος είναι $12,5x$,ο αριθμός 12,5 εκφράζει το πόσο κοστίζει ένα μπλουζάκι.
Αντίστοιχα επειδή τα έσοδα από τη πώληση x τεμαχίων, η είσπραξη είναι $15,5x$, το 15,5 είναι η είσπραξη από τη πώληση μιας μπλούζας, άρα το 15,5 εκφράζει το πόσο που πουλιέται ένα μπλουζάκι.

γ) $K(x)=E(x)\Leftrightarrow 12,5x+120=15,5x\Leftrightarrow 3x=120\Leftrightarrow x=40$ μπλουζάκια

Άρα πρέπει να πουλήσουν 40 μπλουζάκια για να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση.

δ) Αν $A(x)$ η συνάρτηση του κέρδους τότε $A(x)=E(x)-K(x)=15,5x-12,5x-120=3x-120$

$A(60)=3\cdot 60-120=180-120=60$ ευρώ. Θα έχει κέρδος 60 ευρώ.

1418.Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d+1) cm.
α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. **(Μονάδες 6)**
β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:
i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. **(Μονάδες 12)**
ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Αν $E_A(d)$ το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α, τότε : $E_A(d)=d^2$

Αν $E_B(d)$ το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Β, τότε : $E_B(d)=(d+1)^2$.

β) i) Αν Ε η επιφάνεια του τοίχου τότε $E=200\cdot E_A(d)=128\cdot E_B(d)\ cm^2$.

$$200\cdot E_A(d)=128\cdot E_B(d)\Leftrightarrow 200d^2=128(d+1)^2\overset{(:8)}{\Leftrightarrow}$$

$$25d^2=16(d+1)^2\Leftrightarrow 25d^2=16d^2+32d+16\Leftrightarrow 9d^2-32d-16=0$$

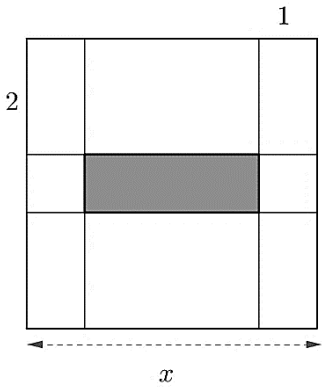
$$\Delta=(-32)^2-4\cdot 9\cdot(-16)=1024+576=1600=40^2$$

$$d=\frac{32+40}{2\cdot 9}=\frac{72}{18}=4cm \text{ ή } d=\frac{32-40}{2\cdot 9}=\frac{-8}{18}<0 \text{ Απορρίπτεται}$$

Άρα το πλακάκι τύπου Α θα έχει πλευρά 4 cm και το πλακάκι τύπου Β πλευρά (4+1)=5 cm

ii) $E=200\cdot E_A(d)=200\cdot 4^2=200\cdot 16=3200cm^2$.

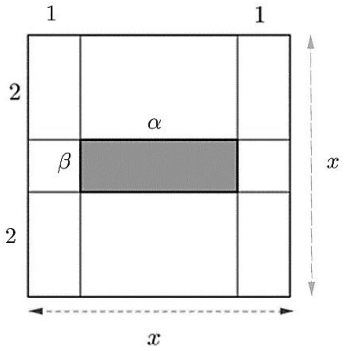
1420. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm (5≤x≤10) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x)=(x-2)(x-4)$ **(Μονάδες 8)**
β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2. **(Μονάδες 7)**
γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Έστω α, β οι διαστάσεις της κάρτας .
Τότε $\alpha = x-1-1 = x-2$ και $\beta = x-2-2 = x-4$.
Επειδή το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = \alpha \cdot \beta$, το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$



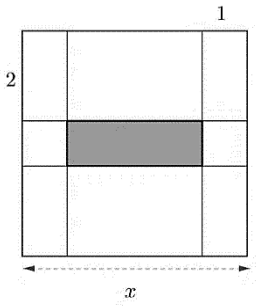
β) $E(x) = (x-2)(x-4) \Leftrightarrow 35 = (x-2)(x-4) \Leftrightarrow$
$x^2 - 2x - 4x + 8 = 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0 \Leftrightarrow$
$x = 9\,\text{cm}$ ή $x = -3 < 0$ απορρίπτεται

γ) $E(x) \geq 24 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) \geq 24 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4x + 8 \geq 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \geq 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100 = 10^2$, $x_1 = \dfrac{6+10}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ και $x_2 = \dfrac{6-10}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

Άρα: $x^2 - 6x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x-8)(x+2) \geq 0 \overset{x+2>0}{\Leftrightarrow} x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 8$

1421. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



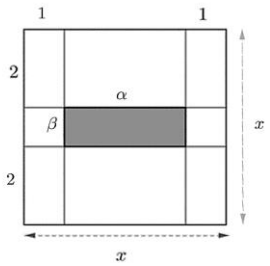
α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = x^2 - 6x + 8$. (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2. (Μονάδες 7)

γ) Αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν το πολύ 35 cm2, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει τετραγώνου. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Έστω α, β οι διαστάσεις της κάρτας.
Τότε $\alpha = x-1-1 = x-2$ και $\beta = x-2-2 = x-4$.
Επειδή το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = \alpha \cdot \beta$, το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:
$E(x) = (x-2)(x-4) = x^2 - 2x - 4x + 8 = x^2 - 6x + 8$



β) $E(x) = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow 24 = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = -2 < 0$ απορρίπτεται ή $x = 8$ cm

γ) $E(x) \leq 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3,9]$ όμως $5 \leq x \leq 10$ άρα τελικά $x \in [5,9]$.

1422. Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:
Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (○C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (○F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.
Π2: **Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (○C) σε βαθμούς**

Κέλβιν (○K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (○C) το 273.
α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (Μονάδες 8)
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (○K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (○F) είναι η: $\mathbf{K=\frac{F-32}{1,8}+273}$
(Μονάδες 7)
γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278○K μέχρι 283 ○K. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ○F. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $\Pi 1:\ F=1,8\cdot C+32\ (1)$ και $\Pi 2:K=C+273\ (2)$

β) $F=1,8\cdot C+32\Leftrightarrow 1,8\cdot C=F-32\Leftrightarrow C=\frac{F-32}{1,8}\overset{(2)}{\Leftrightarrow} K+273=\frac{F-32}{1,8}\Leftrightarrow K=\frac{F-32}{1,8}-273\ (3)$

γ) $278<K<283\overset{(3)}{\Leftrightarrow}278<\frac{F-32}{1,8}+273<283\overset{(-273)}{\Leftrightarrow}5<\frac{F-32}{1,8}<10\overset{(\cdot 1,8)}{\Leftrightarrow}9<F-32<18\Leftrightarrow 41<F<50$

1437.Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\frac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}}$ **.**

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι για κάθε x∈ Α ισχύει: $\mathbf{f(x)=|x|-2}$**. (Μονάδες 9)**
γ) Για x∈ Α, να λύσετε την εξίσωση: $\mathbf{(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0}$ **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Πρέπει $|x|-3\neq 0\Leftrightarrow|x|\neq 3\Leftrightarrow x\neq\pm 3$.άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

β) $f(x)=\frac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}=\frac{|x|^2-5|x|+6}{|x|-3}=\frac{|x|^2-2|x|-3|x|+6}{|x|-3}=$

$\frac{|x|(|x|-2)-3(|x|-2)}{|x|-3}=\frac{(|x|-2)\cdot\cancel{(|x|-3)}}{\cancel{|x|-3}}=|x|-2$

γ) $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0\Leftrightarrow|x|^2-4(|x|-2)-5=0\Leftrightarrow|x|^2-4|x|+8-5=0\Leftrightarrow|x|^2-4|x|+3=0\ (1)$

Θέτουμε $|x|=\omega\ (2)$

$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\omega^2-4\omega+3=0\Leftrightarrow\omega=1$ ή $\omega=3$, $(2)\overset{\omega=1}{\Rightarrow}|x|=1\Leftrightarrow x=\pm 1$, $(2)\overset{\omega=3}{\Rightarrow}|x|=3\Leftrightarrow x=\pm 3$

1441.Δίνονται οι συναρτήσεις: $\mathbf{f(x)=x^2-4x+\alpha}$ **και** $\mathbf{g(x)=\alpha x-5}$ **,με** $\mathbf{\alpha\in\mathbb{R}}$**.**

α) Αν ισχύει $\mathbf{f(2)=g(2)}$**, να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)**

β) Για $\mathbf{\alpha=1}$**,**

i) να λύσετε την εξίσωση: $\mathbf{f(x)=g(x)}$ **(Μονάδες 8)**

ii) να λύσετε την ανίσωση: $\mathbf{f(x)\geq g(x)}$ **και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση:** $\mathbf{|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)}$ **(Μονάδες 5+5=10)**

Λύση

α) $f(2)=g(2)\Leftrightarrow 2^2-4\cdot 2+\alpha=2\alpha-5\Leftrightarrow 4-8+\alpha=2\alpha-5\Leftrightarrow \alpha=1$

β) i) Για $\alpha=1$ είναι $f(x)=x^2-4x+1$ και $g(x)=x-5$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-4x+1=x-5\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$

ii) $f(x)\geq g(x)\Leftrightarrow x^2-4x+1\geq x-5\Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	-	0	+	

Η λύση της ανίσωσης είναι : $x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

$|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$,όταν :

$f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow x^2-4x+1-x+5\geq 0\Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

1457.Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 10)**

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; **(Μονάδες 6)**

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda-\lambda^2)=1-4\lambda+4\lambda^2=(1-2\lambda)^2\geq 0$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Θα πρέπει $\Delta=0\Leftrightarrow(1-2\lambda)^2=0\Leftrightarrow 1-2\lambda=0\Leftrightarrow 2\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$

γ) Θα πρέπει $x^2-x+\lambda-\lambda^2\geq 0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, που ισχύει όταν

$\Delta\leq 0\Leftrightarrow(1-2\lambda)^2\leq 0\Leftrightarrow 1-2\lambda=0\Leftrightarrow 2\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$

1467. Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}12+0,5x, & \text{αν } 0\leq x\leq 30\\ 0,7x+6, & \text{αν } x>30\end{cases}$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. **(Μονάδες 2)**

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. **(Μονάδες 3)**

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. **(Μονάδες 5)**

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο: $g(x)=12+0,6x$, για $x\geq 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60

κυβικά μέτρα νερού. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) i) $f(0)=12$ ευρώ

ii) $f(10)=12+0,5\cdot 12=12+6=18$ ευρώ

iii) $f(50)=0,7\cdot 50+6=35+6=41$ ευρώ

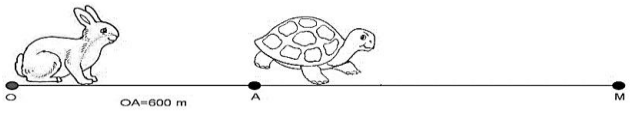
β) Θα πρέπει : $f(x)>g(x)$

Αν $0\le x\le 30$: $f(x)>g(x)\Leftrightarrow \cancel{12}+0,5x>\cancel{12}+0,6x\Leftrightarrow x<0$ άτοπο.

Αν $x>30$: $f(x)>g(x)\Leftrightarrow 0,7x+6>12+0,6x\Leftrightarrow 0,1x>6\Leftrightarrow x>\dfrac{6}{0,1}\Leftrightarrow x>60$

Άρα ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

1484. Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:
Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο Ο.
Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM>600$ μέτρα.
Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t=0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με $OA=600$ μέτρα.
Υποθέτουμε ότι, για $t\ge 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_{\Lambda}(t)=10\,t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_{X}(t)=600+40t$ μέτρα.



α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. **(Μονάδες 10)**
β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι ΟΜ=2250 μέτρα. Να βρείτε:
i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα. **(Μονάδες 5)**
ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή t = 12min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση. **(Μονάδες 5)**
iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Για να κερδίσει η χελώνα τον αγώνα θα πρέπει:

$$S_{\Lambda}(t)<S_X(t)\Leftrightarrow 10\,t^2<600+40t\Leftrightarrow 10\,t^2-40t-600<0\overset{(:10)}{\Leftrightarrow}t^2-4t-60<0$$

$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-60)=16+240=256=16^2$

$t_1=\dfrac{4+16}{2}=\dfrac{20}{2}=10$ και $t_2=\dfrac{4-16}{2}=\dfrac{-12}{2}=-6$ απορρίπτεται αφού $t\ge 0$.

Είναι $t^2-4t-60<0\Leftrightarrow (t+6)(t-10)<0\overset{t\ge 0\Leftrightarrow t+6>0}{\Leftrightarrow} t-10<0\Leftrightarrow t<10$ Άρα $t\in[0,10)$

Για $t=10$: $S_x(10)=10\cdot 10^2=1000=S_{\Lambda}(10)$

Θα πρέπει το τέρμα να βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη από 1000m από το Ο.

β) i) Όταν $t=10$ από το α) ερώτημα

ii) Επειδή $t=12>10$ προηγείται ο λαγός και η απόσταση μεταξύ τους είναι:

$S_{\Lambda}(12)-S_{x}(12)=1440-1080=360\text{m}$

γ) Επειδή $OM=2250\text{m}>1000\text{m}$,θα τερματίσει πρώτος ο λαγός.

$S_{\Lambda}(t)=10\cdot t^2=2250\Leftrightarrow t^2=225\overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow}t=15\,\text{min}.$

Άρα τη χρονική στιγμή $t=15\,\text{min}$ θα τερματίσει ο νικητής ,δηλαδή ο λαγός.

1495.Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90º) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x+y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο : $E(x)=\frac{1}{2}\left(-x^2+10x\right)$, $x\in(0,10)$ **(Μονάδες 9)**

β) Να αποδείξετε ότι $E(x)\leq\frac{25}{2}$ για κάθε $x\in(0,10)$. **(Μονάδες 8)**

γ) Για ποια τιμή του $x\in(0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ; **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $x+y=10\Leftrightarrow y=10-x\ \ (1)$

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσο με $E=\frac{x\cdot y}{2}\overset{(1)}{=}\frac{1}{2}x\cdot(10-x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x)$

Άρα $E(x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x)$, $x\in(0,10)$

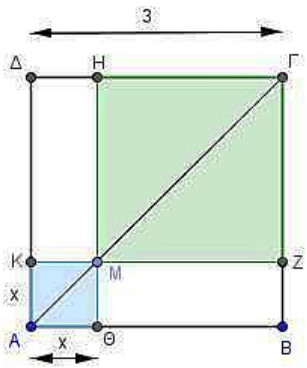
β) $E(x)\leq\frac{25}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(-x^2+10x)\leq\frac{25}{2}\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}-x^2+10x-25\leq 0\Leftrightarrow$

$x^2-10x+25\geq 0\Leftrightarrow(x-5)^2\geq 0$ ισχύει

γ) $E(x)=\frac{25}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(-x^2+10x)=\frac{25}{2}\Leftrightarrow x^2-10x+25=0\Leftrightarrow(x-5)^2=0\Leftrightarrow x-5=0\Leftrightarrow x=5$δεκτή

Για $x=5:(1)\Rightarrow y=5$.Στην περίπτωση αυτή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

1497. Στο επόμενο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ=3 και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι $E=2x^2-6x+9$, $x\in(0,3)$. **(Μονάδες 9)**

β) Να αποδείξετε ότι $E\geq\frac{9}{2}$, για κάθε $x\in(0,3)$. **(Μονάδες 8)**

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $H\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta H = 3 - x$

$E = (HMZ\Gamma) + (AKM\Theta) = x^2 + (3-x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0,3)$

β) $4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 \geq 0$ ισχύει

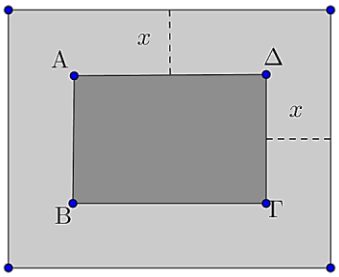
γ) $E = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 = \frac{9}{2} \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} 4x^2 - 12x + 18 = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΘΜ : $AM^2 = A\Theta^2 + M\Theta^2 \overset{x=\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow} AM^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$AM^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \Leftrightarrow AM^2 = \frac{18}{4} \Leftrightarrow AM^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow AM = \sqrt{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow AM = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

1505. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m (x > 0), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$\mathbf{E(x) = 4x^2 + 80x}$, $\mathbf{x > 0}$. **(Μονάδες 9)**

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό

$\mathbf{E = 500\ m^2}$. **(Μονάδες 7)**

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $EZ = A\Delta + 2x = 25 + 2x$, $EH = AB + 2x = 15 + 2x$

$(EZH\Theta) = (15+2x)(25+2x) = 375 + 30x + 50x + 4x^2 =$

$4x^2 + 80x + 375\,m^2$

$(AB\Gamma\Delta) = 15 \cdot 25 = 375\ m^2$

$E(x) = (EZH\Theta) - (AB\Gamma\Delta) = 4x^2 + 80x + \cancel{375} - \cancel{375} \Leftrightarrow$

$E(x) = 4x^2 + 80x,\ x > 0$

$E(x) = 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x = 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 = 0 \overset{(:4)}{\Leftrightarrow}$

$x^2 + 20x - 125 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -25$ απορρίπτεται

β) Άρα x=5m

γ) $E(x) < 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x < 500 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x - 500 < 0 \overset{(:4)}{\Leftrightarrow}$

$x^2 + 20x - 125 < 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+25) < 0 \overset{x+25>0}{\Leftrightarrow} x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < 5$, άρα $x \in (0,5)$.

1506. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο Π=40cm. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$. **(Μονάδες 4)**

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 20x - x^2$. **(Μονάδες 8)**

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \le 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. **(Μονάδες 6)**

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Έστω y το πλάτος του ορθογωνίου . $\Pi = 40 \Leftrightarrow 2x + 2y = 40 \overset{(:2)}{\Leftrightarrow} x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - x \quad (1)$

Επειδή x, y μήκη πλευρών είναι x, y >0. Από την σχέση (1) ισχύει : $y > 0 \Leftrightarrow x < 20$.Άρα $0 < x < 20$

β) $E(x) = x \cdot y = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$

γ) $E(x) \le 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 \le 100 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \ge 0 \Leftrightarrow (x-10)^2 \ge 0$ ισχύει .

δ) Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν είναι :

$E(x) = 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow (x-10)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10\,cm$

Για $x = 10 \Leftrightarrow y = 20 - 10 \Leftrightarrow y = 10$ cm

Το μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο πλευράς 10cm.

1510. Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α.). Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος Κ(ν) της επιχείρησης, αν γεμίζει τόνερ το μήνα. **(Μονάδες 5)**

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα Ε(ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα. **(Μονάδες 5)**

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i) να μην έχει ζημιά. **(Μονάδες 7)**

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Το κόστος για το γέμισμα ν τόνερ είναι 15ν και μαζί με τα πάγια έξοδα, έχουμε: $K(\nu) = 15\nu + 6500$

β) Τα έσοδα από την πώληση ν τόνερ, είναι $E(\nu) = 25\nu$

γ) i) Για να μην έχει ζημιά πρέπει Έσοδα = έξοδα

Άρα $E(\nu) = K(\nu) \Leftrightarrow 15\nu + 6500 = 25\nu \Leftrightarrow 10\nu = 6500 \Leftrightarrow \nu = 650$ τόνερ ανά μήνα

ii) Έστω Α(ν) η συνάρτηση του κέρδους τότε πρέπει :

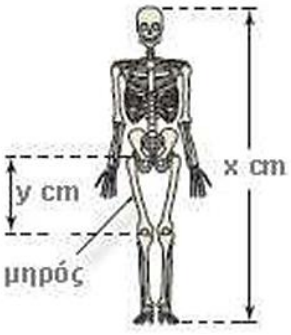
$$A(\nu) \ge 500 \Leftrightarrow E(\nu) - K(\nu) \ge 500 \Leftrightarrow 25\nu - 15\nu - 6500 \ge 500 \Leftrightarrow$$

$$10\nu \ge 7000 \Leftrightarrow \nu \ge 700 \text{ τόνερ ανά μήνα}$$

1501.Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους *y* (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους *x* (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :

Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας $y = 0,45x - 31$



α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους *38,5*cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. **(Μονάδες 8)**

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου *164*cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους *42,8*cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 8)**

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Αντικαθιστούμε για y=38,5 στον τύπο που δίνει το μήκος *y* (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους *x* (σε cm) μιας γυναίκας $38,5 = 0,43x - 26 \Leftrightarrow 0,43x = 64,5 \Leftrightarrow x = 150\text{cm}$
Άρα το ύψος της γυναίκας είναι 1,5m

β) Όμοια : $42,8 = 0,45x - 31 \Leftrightarrow 0,45x = 73,8 \Leftrightarrow x = 164\text{cm}$.Επομένως είναι πιθανό να προέρχονται από τον ίδιο άντρα

γ) Θα πρέπει $0,43x - 26 = 0,45x - 31 \Leftrightarrow 0,02x = 5 \Leftrightarrow x = 250\text{cm}$.Όταν έχουν ύψος 2,5m

1526.Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- **$|1 - 3\alpha| < 2$**
- **Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.**

α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3} < \alpha < 1$. **(Μονάδες 5)**

β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta - 3\alpha - 1| < 3$. **(Μονάδες 10)**

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4(\beta - 2)x + \beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $|1 - 3\alpha| < 2 \Leftrightarrow -2 < 1 - 3\alpha < 2 \Leftrightarrow -3 < -3\alpha < 1 \ (2) \overset{(:(-3)<0)}{\Leftrightarrow} 1 > \alpha > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \alpha < 1 \ (3)$

β) $d(\beta, 2) < 1 \Leftrightarrow |\beta - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \beta - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < \beta < 3 \ (4)$

$(2) \Rightarrow -3 - 1 < -3\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow -4 < -3\alpha - 1 < 0 \ (5)$

Με πρόσθεση των (4) και (5) έχουμε $-3 < \beta - 3\alpha - 1 < 3 \Leftrightarrow |\beta - 3\alpha - 1| < 3$

γ) Πρέπει $4x^2 - 4(\beta - 2)x + \beta^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι:

$\Delta=\left[-4(\beta-2)\right]^2-4\cdot4\cdot\beta^2=16(\beta^2-4\beta+4)-16\beta^2=16\beta^2-64\beta+64-16\beta^2=-64\beta+64=64(-\beta+1)$

$(4)\Rightarrow-1>-\beta>-3\Leftrightarrow-3<-\beta<-1\Leftrightarrow-2<1-\beta<0$

Άρα $-\beta+1<0\Leftrightarrow64(-\beta+1)<0\Leftrightarrow\Delta<0$

Άρα $4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ($\alpha=4>0$).

12689. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_1(t) = 150 + 50t$, $t \in [0,5]$. Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t) = 650 - 25t$.

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο; (Μονάδες 6)

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5ο μέχρι το 10ο λεπτό της κίνησής του; (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτέρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα. (Μονάδες 6)

δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

Λύση

α) Το ελικόπτερο βρίσκεται στο ελικοδρόμιο την χρονική στιγμή t = 0 και το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας είναι $Y_1(0)=150+50\cdot0=150$ μέτρα.

β) Μετά από 5 λεπτά, το ελικόπτερο θα βρίσκεται σε ύψος $Y_1(5)=150+50\cdot5=400$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Άρα θα πετάει σταθερά στο ύψος αυτό για χρόνο $t \in [5, 10]$.

γ) Το ελικόπτερο κατεβαίνει από το 10ο λεπτό μέχρι να φτάσει πάλι στο ελικοδρόμιο. Θα φτάσει στο ελικοδρόμιο μετά από 10 λεπτά, επομένως το πεδίο ορισμού της $Y_2(t)$ είναι το διάστημα [10, 20].
Σε ύψος 250 μέτρων από τη επιφάνεια της θάλασσας θα βρίσκεται και όταν ανεβαίνει και όταν επιστέφει στο ελικοδρόμιο. Δηλαδή θα βρούμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία:
$Y_1(t) = 250 \Leftrightarrow 150 + 50t = 250 \Leftrightarrow t = 2$ λεπτά και $Y_2(t) = 250 \Leftrightarrow 650 - 25t = 250 \Leftrightarrow t = 16$ λεπτά

δ) i. Όταν ανεβαίνει το ελικόπτερο, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (μέχρι το 5 ο λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας αυξάνει σταθερά κατά 50 μέτρα, αφού:
$Y_1(t+1)-Y_1(t)=\left[150+50(t+1)\right]-(150+50t)=50$ μέτρα.

ii. Όταν επιστρέφει το ελικόπτερο στη βάση του, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (από το 10ο μέχρι το 20ο λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας μειώνεται σταθερά κατά 25 μέτρα, αφού: $Y_2(t+1)-Y_2(t)=\left[650-25(t+1)\right]-(650-25t)=-25$ μέτρα.

13114. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}$.

α) Να δείξτε ότι $f(x)=d(x,2)-d(x,1)$. (Μονάδες 9)

β) Αν τα σημεία Α και Β παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x)=0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $f(x)=\dfrac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}=\dfrac{|x-1|-|-3(x-1)|+|2(x-2)|}{2}=\dfrac{|x-1|-3|x-1|+2|x-2|}{2}\Leftrightarrow$

$f(x)=\dfrac{2|x-2|-2|x-1|}{2}=\dfrac{\cancel{2}\left(|x-2|-|x-1|\right)}{\cancel{2}}=|x-2|-|x-1|=d(x,2)\ -d(x,1)$

β) Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow d(x,2)\ -d(x,1)=0\Leftrightarrow d(x,2)\ =d(x,1)$

Αν Μ το σημείο του άξονα που αντιστοιχεί στη λύση x της παραπάνω εξίσωσης, αυτό θα πρέπει να ισαπέχει από τα σημεία Α και Β και κατά συνέπεια θα είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. Άρα $x=\dfrac{3}{2}$.

γ) $f(x)=0\Leftrightarrow|x-2|-|x-1|=0\Leftrightarrow|x-2|=|x-1|\Leftrightarrow$

$\left(x-2=x-1\Leftrightarrow -2=-1\ \text{αδύνατη}\right)$ ή $\left(x-2=-x+1\Leftrightarrow 2x=3\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\right)$

14629.Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\dfrac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).
α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του Ε(x) δίνεται από τον τύπο $E(x)=\dfrac{4}{3}(x-25)$. **(Μονάδες 7)**
β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε; **(Μονάδες 4)**
γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50 . Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50; **(Μονάδες 8)**
δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί; **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Αν το πλήθος των σωστών απαντήσεων είναι x, τότε το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων είναι $100-x$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ο φοιτητής θα πάρει x βαθμούς για τις σωστές απαντήσεις και θα του αφαιρεθούν (αρνητική βαθμολογία) $\dfrac{1}{3}(100-x)$ βαθμοί για τις λανθασμένες απαντήσεις. Έτσι, η τελική βαθμολογία του θα είναι

$E(x)=x-\dfrac{1}{3}(100-x)=\dfrac{3x-100+x}{3}=\dfrac{4x-100}{3}=\dfrac{4}{3}(x-25)$ όπου x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων.

β) Είναι: $E(x)=88\Leftrightarrow\dfrac{4}{3}(x-25)=88\Leftrightarrow 4x-100=264\Leftrightarrow 4x=364\Leftrightarrow x=91$

Άρα ο φοιτητής που βαθμολογήθηκε με 88, απάντησε σωστά σε 91 ερωτήσεις και λανθασμένα σε 9 ερωτήσεις.

γ) Έστω ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή που απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις είναι ίση με 50 . Τότε έχουμε: $E(x)=50\Leftrightarrow\dfrac{4}{3}(x-25)=50\Leftrightarrow 4x-100=150\Leftrightarrow 4x=250\Leftrightarrow x=\dfrac{125}{2}=62,5$ που είναι άτοπο,

αφού ο αριθμός x που παριστάνει το πλήθος των σωστών απαντήσεων, είναι ακέραιος. Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50.
Ένας φοιτητής θα πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση, μόνο όταν

$$E(x)>50 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x-25)>50 \Leftrightarrow 4x-100>150 \Leftrightarrow 4x>250 \Leftrightarrow x>\frac{125}{2}=62,5$$

Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή είναι μεγαλύτερη του 50 μόνο όταν απαντήσει σωστά σε 63 τουλάχιστον ερωτήσεις.

δ) Έστω ότι το πλήθος των σωστών απαντήσεων των φοιτητών είναι x_1, x_2 αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$E(x_1)+E(x_2)=140 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x_1-25)+\frac{4}{3}(x_2-25)=140 \Leftrightarrow$$

$$4x_1-100+4x_2-100=420 \Leftrightarrow 4(x_1+x_2)=620 \Leftrightarrow x_1+x_2=155$$

Επομένως οι δυο φοιτητές απάντησαν σωστά σε 155 από τις 200 ερωτήσεις τους και λανθασμένα στις υπόλοιπες 200 - 155 = 45 ερωτήσεις

14702.Για της ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και 2x − 1, όπου $x>\frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν Ε της μακέτας σε συνάρτηση του x.
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα. **(Μονάδες 7)**

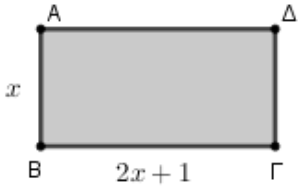
γ) Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.
(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$$\Pi=2x+2(2x-1)=2x+4x-2=6x-2,\ x>\frac{1}{2}.$$

Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου είναι $E=x(2x-1)=2x^2-x,\ x>\frac{1}{2}$.



β) Είναι $\Pi\le 8 \Leftrightarrow 6x-2\le 8 \Leftrightarrow 6x\le 10 \Leftrightarrow x\le\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$. Τότε $2x\le 2\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 2x-1\le\frac{10}{3}-1 \Leftrightarrow 2x-1\le\frac{7}{3}$

Επειδή $x>\frac{1}{2}$, για τις διαστάσεις του ορθογωνίου ισχύει ότι $\frac{1}{2}<x\le\frac{5}{3}$ και $0<2x-1\le\frac{7}{3}$.

γ) Το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο όταν

$E\le 1 \Leftrightarrow 2x^2-x\le 1 \Leftrightarrow 2x^2-x-1\le 0$.

Το τριώνυμο $2x^2-x-1$ έχει ρίζες $-\frac{1}{2}$ και 1,

και με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμου, προκύπτει ότι

$2x^2-x-1\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$. Όμως $x>\frac{1}{2}$, άρα $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$.

x	$-\infty$ -1/2		1 $+\infty$
$2x^2-x-1$	+ 0	−	0 +

Γραφική παράσταση συνάρτησης

2ο θέμα

1259.Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(Μονάδες 13)**

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$.Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

β) Το σημείο $M\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Άρα ισχύει $f(\alpha)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2-1}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow \alpha^2-1=8\Leftrightarrow \alpha^2=9\Leftrightarrow \alpha=\pm 3$

1299.α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A=x^3-x^2+3x-3$. **(Μονάδες 13)**

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $A=x^3-x^2+3x-3=x^2(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+3)$

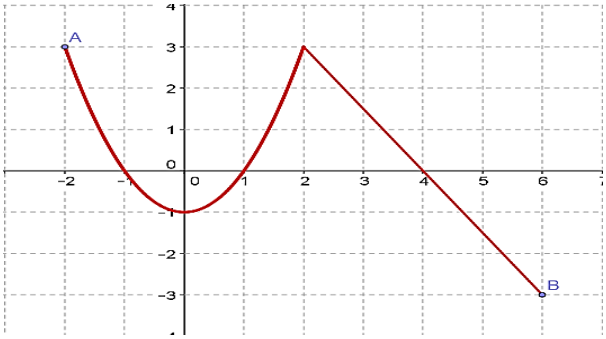
β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση :

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \frac{3}{x}=x^2-x+3 \overset{(\cdot x)}{\Leftrightarrow} 3=x^3-x^2+3x \Leftrightarrow$

$x^3-x^2+3x=3=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}(x^2+3)(x-1)=0 \overset{(x^2+3\neq 0)}{\Leftrightarrow} x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Είναι $f(1)=\frac{3}{1}=3=g(1)$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$.

1304.Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(Μονάδες 6)**

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)
δ)Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Οι προβολές όλων των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στον άξονα x΄x , δημιουργούν το σύνολο $[-2,6]$, άρα $A_f=[-2,6]$

β)

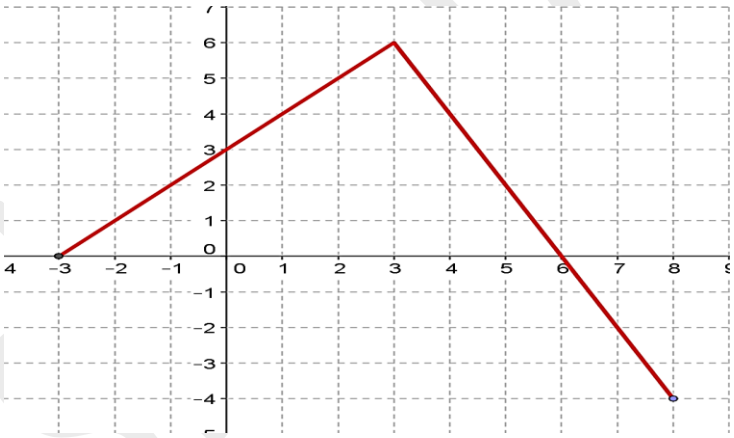
x	-2	-1	0	1	2	6
y	3	0	-1	0	3	-3

γ) Είναι τα σημεία (-1,0), (1,0),(4,0) με τον x΄x και το (0,-1) με τον y΄y.

δ) τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές είναι :

$(-1,1)\cup(4,6]$

1305.



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .
α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)
δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Οι προβολές όλων των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στον άξονα x΄x , δημιουργούν το σύνολο $[-3,8]$, άρα $A_f=[-3,8]$

β)

x	-3	-1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

γ) Είναι τα σημεία (-3,0),(6,0) με τον x΄x και το (0,3) με τον y΄y.

δ) Είναι στο διάστημα (-3,6).

1345.Δίνεται η συνάρτηση f , με $\mathbf{f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . **(Μονάδες 7)**
β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f . **(Μονάδες 9)**
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄ y . **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Πρέπει $x\neq 3$.Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{3\}$

β) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=x-2$

γ) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση : $f(x)=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι το σημείο A(2,0).
Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο (0,f(0)). Είναι $f(0)=0-3=-3$, άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το $B(0,-3)$.

1358.Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=x^2+2x-15,\ x\in\mathbb{R}}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\mathbf{f(-1)+f(0)+f(1)}$. **(Μονάδες 10)**
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $f(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)-15=1-2-15=-16$,

$f(0)=0^2+2\cdot 0-15=-15$, $f(1)=1^2+2\cdot 1-15=-12$

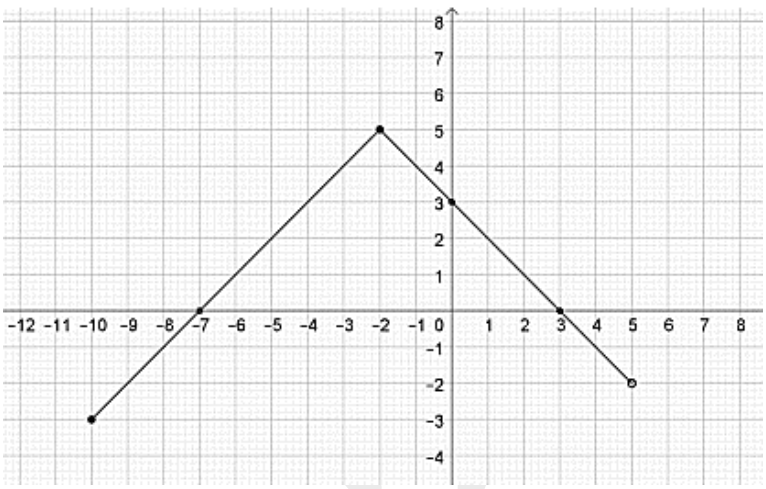
$f(-1)+f(0)+f(1)=-16-15-12=-43$

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση : $f(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x-15=0\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-5$

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της με τον άξονα x΄x είναι τα σημεία $A(-5,0)$ και $B(3,0)$.

Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $(0,f(0))$. Είναι $f(0)=-15$,άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $\Gamma(0,-15)$.

12910. **Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.**
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α και το σύνολο τιμών της f(A).
(Μονάδες 8)
β) Να βρείτε τις τιμές f(-2), f(0), f(3).
(Μονάδες 6)
γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες f(x) = 0. (Μονάδες 4)
δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες f(x) < 0. (Μονάδες 7)



Λύση

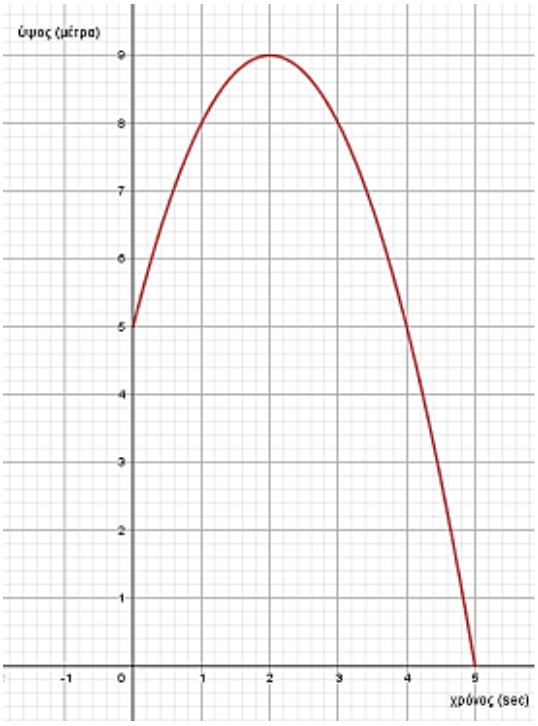
α) $A=[-10,5)$ και $f(A)=[-3,5]$.

β) $f(-2)=5,\ f(0)=3,\ f(3)=0$

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x, οπότε: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-7$ ή $x=3$

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x, οπότε: $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in[-10,-7)\cup(3,5)$.

12729. **Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**
α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;
(Μονάδες 6)
β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό; (Μονάδες 6)
γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.
(Μονάδες 7)
δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος. (Μονάδες 6)



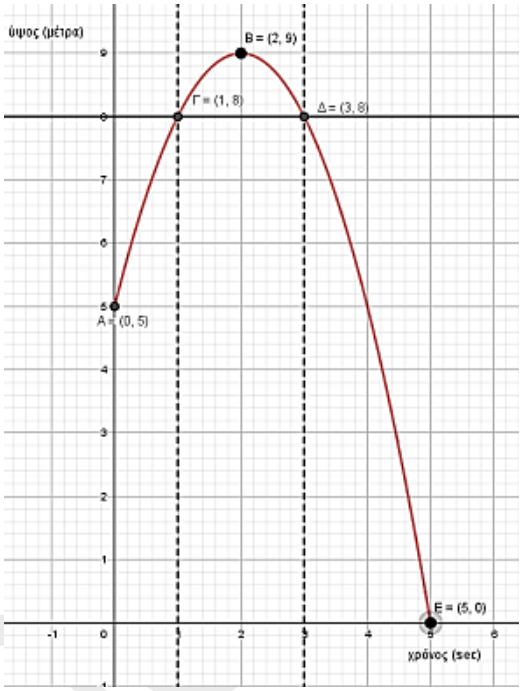
Λύση

α. Ως αρχή της μέτρησης έχουμε το σημείο Α(0,5). Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_1=0$ sec το σώμα βρίσκεται σε ύψος 5 μέτρα.

β. Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα αντιστοιχεί στο σημείο Β (2,9). Οπότε για τη χρονική στιγμή t_2=2 sec το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος 9 μέτρα.

γ. Αν φέρουμε την ευθεία y=8 που αντιστοιχεί σε ύψος 8 μέτρων θα δούμε ότι τέμνει το διάγραμμα σε δύο σημεία. Αυτά είναι το Γ(1,8) και Δ(3,8). Οπότε το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα τις χρονικές στιγμές t_3=1 sec και t_4=3 sec.

δ. Το έδαφος αντιστοιχεί στον άξονα x΄x (ύψος=0 μέτρα). Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα x΄x, το Ε που αντιστοιχεί και στο τέλος της μέτρησης. Οπότε το σώμα συναντά στο έδαφος τη χρονική στιγμή t_5=5 sec.



12680. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **(Μονάδες 10)**
β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(4,3) ανήκει στη γραφική παράσταση της f. **(Μονάδες 7)**
γ) Να εξετάσετε αν το σημείο Ν(-1,-2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x\geq 0$ και $\sqrt{x}-1\neq 0\Leftrightarrow\sqrt{x}\neq 1\Leftrightarrow x\neq 1$, οπότε $A=[0,1)\cup(1,+\infty)$.

β) Το σημείο Μ ανήκει στην γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν
$f(4)=3\Leftrightarrow\dfrac{4-1}{\sqrt{4}-1}=3\Leftrightarrow\dfrac{3}{1}=3$ που ισχύει

γ) Επειδή το -1 που είναι η τετμημένη του σημείου Ν δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, το σημείο Ν δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

12686.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **(Μονάδες 8)**
β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ **ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.** **(Μονάδες 9)**
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f με τους άξονες. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$, οπότε $A_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

β) Το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν

$f(2)=4 \Leftrightarrow \frac{2\cdot 2}{2-1}=4 \Leftrightarrow \frac{4}{1}=4$ ισχύει

γ) $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1}=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες στην αρχή Ο.

13322.Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{g(x)=\frac{x}{x^2+2}+\sqrt{x-1}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για x=1, x = - 2, x = 2 . **(Μονάδες 9)**

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον y΄y άξονα; **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ και $x^2+2\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq -2$ που ισχύει. Άρα $A_f=[1,+\infty)$.

β) Είναι $g(1)=\frac{1}{1^2+2}+\sqrt{1-1}=\frac{1}{3}$, $g(2)=\frac{2}{2^2+2}+\sqrt{2-1}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

Επειδή το – 2 δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της g, δεν ορίζεται η τιμή της για x = -2.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον y΄y άξονα, διότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

14306.Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{5}+3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης . **(Μονάδες 10)**

β) Να υπολογίσετε το $\mathbf{f(-24)}$**.** **(Μονάδες 7)**

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $\mathbf{(1,3)}$ **ανήκει στην γραφική παράσταση;** **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$, άρα $A=(-\infty,1]$.

β) $f(-24)=\frac{\sqrt{1+24}}{5}+3=\frac{5}{5}+3=1+3=4$.

γ) Για να ανήκει το σημείο $(1,3)$ στη γραφική παράσταση της f πρέπει

$f(1)=3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-1}}{5}+3=3 \Leftrightarrow 0+3=3$ ισχύει

14596.Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+1}}$ **με** $\mathbf{x\neq -1}$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $\mathbf{f(x)=x-3}$ **για κάθε** $\mathbf{x\neq -1}$.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $\mathbf{A(1,-4)}$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=\dfrac{x^2-2x-2-1}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)-2(x+1)}{x+1}=\dfrac{\cancel{(x+1)}(x-1-2)}{\cancel{x+1}}=x-3$

β) Είναι $f(1)=1-3=-2\neq -4$, άρα η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από το σημείο Α.

14603. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\leq 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(3)$ **και** $f(5)$. **(Μονάδες 6)**

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $f(-1)=2(-1)-5=-7$, $f(3)=2\cdot 3-5=1$ και $f(5)=5^2=25$

β) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0)=0$.

Όμως $f(0)=2\cdot 0-5=-5$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Είναι $f(0)=-5$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $(0,-5)$.

14628.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x}$, $x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f **διέρχεται από το σημείο Α(4,3). (Μονάδες 7)**

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4,-3)$ **είναι σημείο της** C_f. **(Μονάδες 8)**

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f **της f με την ευθεία y = 3 (Μονάδες 10)**

Λύση

α) Για να διέρχεται η C_f από το σημείο Α(4,3) πρέπει

$f(4)=3\Leftrightarrow \dfrac{4^2-4}{4}=3\Leftrightarrow \dfrac{16-4}{4}=3\Leftrightarrow \dfrac{12}{4}=3$ ισχύει.

β) Για να διέρχεται η C_f από το σημείο $B(-4,-3)$ πρέπει

$f(-4)=-3\Leftrightarrow \dfrac{(-4)^2-4}{-4}=-3\Leftrightarrow \dfrac{16-4}{-4}=-3\Leftrightarrow -\dfrac{12}{4}=-3$ ισχύει.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=3$.

Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=3\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{x}=3\Leftrightarrow x^2-4=3x\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=9+16=25$ και ρίζες

$x_1=\dfrac{3+\sqrt{25}}{2}=\dfrac{8}{2}=4$, $x_2=\dfrac{3-\sqrt{25}}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$.

Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=3$ είναι τα $(4,3)$ και $(-1,3)$.

4ο θέμα

1393.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+\alpha$. Να δείξετε ότι:

i) Αν $\alpha>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $\alpha<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Η τετμημένη του κοινού σημείου βρίσκεται από την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+3x+2=x+1\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow$

$(x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$. Τότε $f(-1)=g(-1)=0$, άρα κοινό σημείο είναι το $M(-1,0)$.

β) Για τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f,h έχουμε:

$f(x)=h(x)\Leftrightarrow x^2+3x+2=x+\alpha\Leftrightarrow x^2+2x+2-\alpha=0$ (1).

Η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(2-\alpha)=4-8+4\alpha=4\alpha-4=4(\alpha-1)$

i) Αν $\alpha>1$, τότε $\Delta>0$ και η (1) έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες , άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $\alpha<1$, τότε $\Delta<0$ και η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h δεν έχουν κοινά σημεία.

1408.Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda\neq0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda\neq2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση :

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2=\lambda x+1-\lambda\Leftrightarrow x^2-\lambda x-1+\lambda=0$

$\Delta=(-\lambda)^2-4\cdot1\cdot(-1+\lambda)=\lambda^2+4-4\lambda=(\lambda-2)^2\geq0$

Άρα η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2-\lambda x-1+\lambda=0$ (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα
Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για $\lambda=2$ είναι $\Delta=0$, τότε η (1) έχει μία διπλή ρίζα την $x=\frac{\lambda}{2}=\frac{2}{2}=1$ και $f(1)=g(1)=1$.

Επομένως έχουν κοινό σημείο το (1,1).

γ) Από τις σχέσεις Vieta : $S = x_1 + x_2 = \lambda$ και $P = x_1 \cdot x_2 = -1 + \lambda$

Άρα : $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - |\lambda| - 2 = 0 \Leftrightarrow |\lambda|^2 - |\lambda| - 2 = 0$ (1)

Θέτουμε $|\lambda| = \omega$ (2) , τότε $(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \omega^2 - \omega - 2 = 0 \Leftrightarrow \omega = -1$ ή $\omega = 2$

$(2) \overset{\omega=-1}{\Rightarrow} |\lambda| = -1$ αδύνατη και $(2) \overset{\omega=2}{\Rightarrow} |\lambda| = 2 \overset{\lambda \neq 2}{\Leftrightarrow} \lambda = -2$

1433.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1, 2) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α . (Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Πρέπει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$: $f(1) = 2 \Leftrightarrow \cancel{\alpha} - \alpha + \cancel{2} = \cancel{2} \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει.

β) i)Αφού οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, είναι: $f(1) = g(1) \Leftrightarrow 2 = 1^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow 2 = 1 - \alpha + 3 \Leftrightarrow \alpha = 2$

ii) Για $\alpha = 2$ είναι : $f(x) = 2x$ και $g(x) = x^2 + 1$.

Για να βρούμε αν υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g λύνουμε την εξίσωση: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα δεν υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g .

γ) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \alpha x \cancel{- \alpha} + 2 = x^2 \cancel{- \alpha} + 3 \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + 1 = 0$

Για να έχουν δύο σημεία τομής πρέπει

$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 4 \Leftrightarrow |\alpha| > 2 \Leftrightarrow \alpha > 2$ ή $\alpha < -2$

1454.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{\alpha}{4}}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$, τότε

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Πρέπει $x^2 - x + \frac{\alpha}{4} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,και αυτό ισχύει όταν

$\Delta \le 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot \frac{\alpha}{4} \le 0 \Leftrightarrow 1-\alpha \le 0 \Leftrightarrow \alpha \ge 1$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ αν και μόνο αν:

$f(0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2-0+\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2}$. Πρέπει $\frac{\alpha}{4}\ge 0 \Leftrightarrow \alpha \ge 0$, τότε

$\sqrt{\frac{\alpha}{4}}^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = 1$

Αν $\alpha = 1$ τότε : $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\left|x-\frac{1}{2}\right|$

γ) $f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=1$ ή $x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=0$

1470.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία. **(Μονάδες 10)**

γ) Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Για $\alpha=1$ είναι $g(x)=x+1$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2 \cancel{+1} = x \cancel{+1} \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

$f(0)=g(0)=1$ και $f(1)=g(1)=2$, άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα A(0,1) και B(1,2).

β) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+1=x+\alpha \Leftrightarrow x^2-x+1-\alpha=0$

Για να τέμνονται σε δυο σημεία θα πρέπει

$\Delta>0 \Leftrightarrow (-1)^2-4\cdot 1\cdot(1-\alpha)>0 \Leftrightarrow 1-4+4\alpha>0 \Leftrightarrow 4\alpha>3 \Leftrightarrow \alpha>\frac{3}{4}$

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Για $\alpha>\frac{3}{4}$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες.

Από τις σχέσεις Vieta : $P=x_1\cdot x_2=1-\alpha<0$, άρα οι x_1, x_2 είναι ετερόσημες.

1485.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$, με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 9)**

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 4)**

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $A_f = A_g = \mathbb{R}$

Για να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x λύνουμε την ανίσωση:

$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow |x-1| > 2 \Leftrightarrow x-1 > 2 \Leftrightarrow x > 3$ ή $x-1 < -2 \Leftrightarrow x < -1$

β) $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 \geq 2 > 0 \Rightarrow g(x) > 0$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$

γ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow |x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0$ (1) Θέτουμε $|x-1| = \omega > 0$ (2)

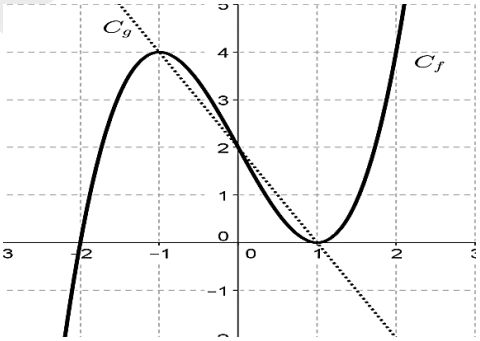
$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \omega^2 - \omega - 6 = 0 \Leftrightarrow \omega = -2$ Απορρίπτεται $(\omega > 0)$ ή $\omega = 3$

$(2) \overset{\omega=3}{\Rightarrow} |x-1| = 3 \Leftrightarrow x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x-1 = -3 \Leftrightarrow x = -2$

$g(4) = |4-1| + 2 = 3 + 2 = 5 = f(4)$, $g(-2) = |-2-1| + 2 = 3 + 2 = 5 = f(-2)$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα A(4,5) και B(-2,5).

1490.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:



α) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$.

(Μονάδες 6)

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. **(Μονάδες 6)**

γ) τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 6)

δ) τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 7)

Λύση

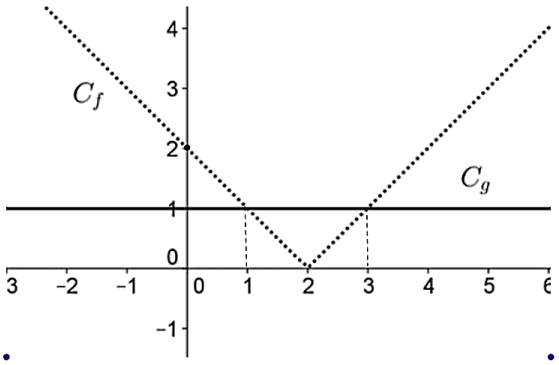
α) Πρόκειται για τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Είναι $x = -1$ ή $x = 0$ ή $x = 1$

β) $f(-1) = 4$, $f(0) = 2$ και $f(1) = 0$

γ) $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$

δ) Πρέπει $f(x) + 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow x \in [-1,0] \cup [1,+\infty)$

1514.Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g. (Μονάδες 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) i) Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα A(-1,1) και B(3,1)

ii) $x\in(1,3)$

β) i) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow|x-2|=1\Leftrightarrow x-2=1\Leftrightarrow x=3$ ή $x-2=-1\Leftrightarrow x=1$

Άρα τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα A(-1,1) και B(3,1)

ii) $f(x)<g(x)\Leftrightarrow|x-2|<1\Leftrightarrow -1<x-2<1\Leftrightarrow 1<x<3\Leftrightarrow x\in(1,3)$

γ) Πρέπει $1-f(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\leq 1\Leftrightarrow x\in[1,3]$ και $f(x)\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$

Άρα η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού για $x\in[1,2)\cup(2,3]$

1524.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Πρέπει $2x-3\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq 3\Leftrightarrow x\neq\dfrac{3}{2}$, άρα : $A_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

β) Το τριώνυμο $4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha$, έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\left[-2(\alpha+3)\right]^2-4\cdot4\cdot3\alpha=4(\alpha^2+6\alpha+9)-48\alpha=4\alpha^2+24\alpha+36-48\alpha=4\alpha^2-24\alpha+36=(2\alpha-6)^2$$

και ρίζες $x_1=\dfrac{2(\alpha+3)+2\alpha-6}{2\cdot 4}=\dfrac{2\alpha+6+2\alpha-6}{8}=\dfrac{4\alpha}{8}=\dfrac{\alpha}{2}$ και

$$x_2=\dfrac{2(\alpha+3)-(2\alpha-6)}{2\cdot 4}=\dfrac{2\alpha+6-2\alpha+6}{8}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$$

Είναι $4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha=4\left(x-\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=(2x-\alpha)(2x-3)$

και $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}=\dfrac{(2x-\alpha)(2x-3)}{2x-3}=2x-\alpha$

γ) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$ είναι:

$f(1)=-1\Leftrightarrow 2-\alpha=-1\Leftrightarrow \alpha=3$

δ) $f(x)=0\Leftrightarrow 2x-\alpha=0\Leftrightarrow 2x=\alpha\Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha}{2}$

Αν $\dfrac{\alpha}{2}\neq\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\alpha\neq 3$.Έχει σημείο τομής με τον άξονα x΄x το σημείο $A\left(\dfrac{\alpha}{2},0\right)$.

Αν $\alpha=3$ δεν έχει σημείο τομής με τον x΄x.

Είναι $f(0)=-\alpha$, άρα έχει σημείο τομής το σημείο B(0,-α)

13027.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\beta$, $g(x)=x+\beta$ όπου $x\in\mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός.

Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\dfrac{3\beta}{2},-3-\dfrac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξτε ότι β = − 1. **(Μονάδες 6)**

β) Για β = − 1

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες x΄x, y΄y. **(Μονάδες 5)**

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$. **(Μονάδες 7)**

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $k\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)-2kg(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Επειδή το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, ισχύει ότι:

$$g\left(\dfrac{3\beta}{2}\right)=-3-\dfrac{\beta}{2}\Leftrightarrow\dfrac{3\beta}{2}+\beta=-3-\dfrac{\beta}{2}\Leftrightarrow 3\beta+2\beta=-6-\beta\Leftrightarrow 6\beta=-6\Leftrightarrow\beta=-1$$

β) i) Είναι $f(x)=x^2-1$

Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα x΄x, έχουν τεταγμένη μηδέν, οπότε οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης $y=f(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$. Άρα τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα x΄x είναι τα Α(1 , 0) και Β(-1 , 0). Επίσης $f(0)=0^2-1=-1$, άρα το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της fτέμνει τον άξονα y′y είναι το Γ(0 , -1).

ii. Η η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$ όταν $f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^2-1<x-1\Leftrightarrow x^2-x<0\Leftrightarrow x(x-1)<0$

Το x^2-x είναι 2ου βαθμού με ρίζες 0 και 1, οπότε με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων, είναι $x^2-x<0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^2-x	+	0	-	0	+

iii. $f(x)-2kg(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1-2k(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1-2kx-2k\geq 0 \Leftrightarrow x^2-2kx-2k-1\geq 0$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με συντελεστή στο x^2 το α = 1 >0, οπότε η ανίσωση ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\Delta\leq 0 \Leftrightarrow (-2k)^2-4\cdot 1\cdot(-2k-1)\leq 0 \Leftrightarrow 4k^2+8k+4\leq 0 \Leftrightarrow 4(k^2+2k+1)\leq 0 \Leftrightarrow$

$4(k+1)^2\leq 0 \Leftrightarrow k+1=0 \Leftrightarrow k=-1$

13030.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$ και $g(x)=|x+3|$. Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. **(Μονάδες 10)**

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g. **(Μονάδες 7)**

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x^2-4x-5\geq 0$

Το τριώνυμο x^2-4x-5 έχει διακρίνουσα

$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)=36$ και ρίζες

$x_1=\frac{4+\sqrt{36}}{2}=5,\ x_2=\frac{4-\sqrt{36}}{2}=-1.$

x	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
x^2-4x-5	+	0	-	0	+

Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι $x^2-4x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 5$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$.

Η συνάρτηση g δεν έχει περιορισμούς οπότε $A_g=\mathbb{R}$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x-5}=|x+3| \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-4x-5}\right)^2=(x+3)^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}-4x-5=\cancel{x^2}+6x+9 \Leftrightarrow -4x-6x=9+5 \Leftrightarrow -10x=14 \Leftrightarrow x=-\frac{14}{10}=-\frac{7}{5}$

Είναι $g\left(-\frac{7}{5}\right)=\left|-\frac{7}{5}+3\right|=\left|-\frac{7}{5}+\frac{15}{5}\right|=\frac{8}{5}$, οπότε κοινό σημείο είναι το $\left(-\frac{7}{5},\frac{8}{5}\right)$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g είναι οι λύσεις της ανίσωσης

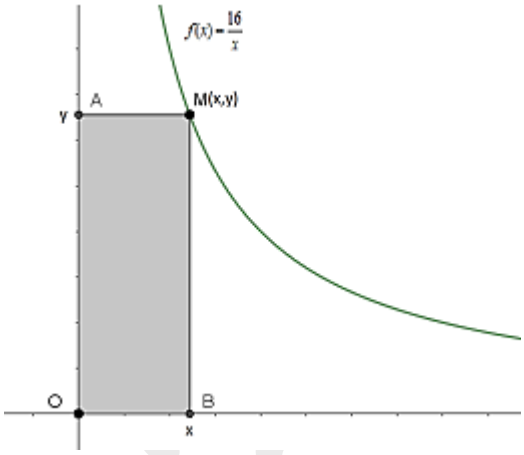
$f(x)<g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x-5}<|x+3| \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-4x-5}\right)^2<(x+3)^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}-4x-5<\cancel{x^2}+6x+9 \Leftrightarrow -4x-6x<9+5 \Leftrightarrow -10x<14 \Leftrightarrow x>-\frac{14}{10}=-\frac{7}{5}.$

Όμως, λόγω του πεδίου ορισμού της f, είναι $x\leq -1$ ή $x\geq 5$, οπότε με συναλήθευση προκύπτει

$x\in\left(-\frac{7}{5},-1\right]\cup[5,+\infty).$

13090.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{16}{x}$, $x>0$.



Ένα σημείο Μ(x, y) κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω Α και Β οι προβολές του Μ στους άξονες y΄y και x΄x αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x)=2x+\frac{32}{x}$, $x>0$ όπου x η τετμημένη του Μ.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους. (Μονάδες 7)

γ) Αν Μ΄ είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜ΄Β να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το Μ΄ έχει τετμημένη 4. (Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΟΑΜ΄Β έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ, δηλαδή ότι $\Pi(x)\geq\Pi(4)$ για κάθε $x>0$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Επειδή το σημείο Μ βρίσκεται στη γραφική παράσταση της f, ισχύει ότι $y=\frac{16}{x}$.

Επειδή τα σημεία Α και Β έχουν συντεταγμένες $A(0,y)$ και $B(x,0)$, το εμβαδόν του ΟΑΜΒ είναι

$(OAMB)=(OB)(OA)=x\cdot y=x\cdot\frac{16}{x}=16$ τετραγωνικές μονάδες και η περίμετρός του είναι

$\Pi(x)=2(OB)+2(OA)=2x+\frac{32}{x}$, $x>0$.

β) $\Pi(x)=20\Leftrightarrow 2x+\frac{32}{x}=20\Leftrightarrow 2x^2+32=20x\Leftrightarrow x^2+16=10x\Leftrightarrow x^2-10x+16=0$

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot16=36$ και ρίζες

$x_1=\frac{10+\sqrt{36}}{2}=8$, $x_2=\frac{10-\sqrt{36}}{2}=2$.

Για x = 8 είναι $y=\frac{16}{8}=2$, άρα Μ(8,2) και για x = 2 είναι $y=\frac{16}{2}=8$, δηλαδή Μ(2,8).

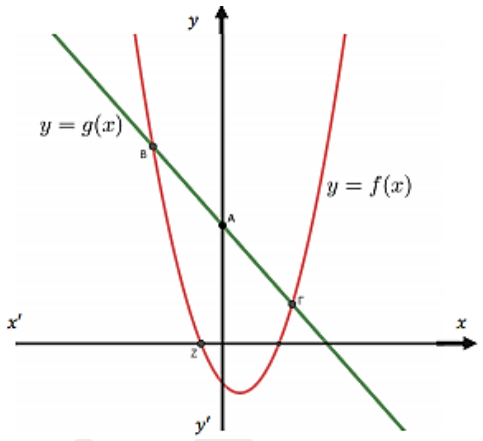
γ) i. Το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο όταν $(OA)=(OB)\Leftrightarrow x=\frac{16}{x}\Leftrightarrow x^2=16\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=4$.

ii. Θα δείξουμε ότι $\Pi(x)\geq\Pi(4)$ για κάθε $x>0$.

Είναι $\Pi(x)\geq\Pi(4)\Leftrightarrow 2x+\frac{32}{x}\geq 2\cdot4+\frac{32}{4}\Leftrightarrow 2x+\frac{32}{x}\geq 8+8\Leftrightarrow 2x+\frac{32}{x}\geq16\Leftrightarrow$

$2x^2+32\geq16x\Leftrightarrow x^2+16\geq8x\Leftrightarrow x^2-8x+16\geq0\Leftrightarrow(x-4)^2\geq0$ ισχύει

12628.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2-x-1$ και $g(x)=3-x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Ζ. **(Μονάδες 10)**

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y=f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y=g(x)$. **(Μονάδες 6)**

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της g και έχει $x=0$, οπότε $g(0)=3-0=3$, άρα Α(0,3).

Τα σημεία Β και Γ είναι κοινά σημεία των C_f, C_g, οπότε οι τετμημένες τους είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-x-1=3-x \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Για $x=2$ είναι $g(2)=3-2=1$, άρα Γ(2,1) και για $x=-2$ είναι $g(-2)=3-(-2)=5$ άρα Β(-2,5).

Το σημείο Ζ βρίσκεται στη C_f και έχει $y=0$, άρα $x^2-x-1=0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=5$ και ρίζες $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Επειδή $x_Z<0$, είναι $x_Z=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, οπότε $Z\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y=f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y=g(x)$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$f(x)>g(x) \Leftrightarrow x^2-x-1>3-x \Leftrightarrow x^2>4 \Leftrightarrow |x|>2 \Leftrightarrow x<-2$ ή $x>2$

γ) Είναι $\left|f(\alpha)-(-g(\alpha))\right|=\left|f(\alpha)+g(\alpha)\right|=\left|\alpha^2-\alpha-1+3-\alpha\right|=\left|\alpha^2-2\alpha+2\right|=\left|\alpha^2-2\alpha+1+1\right|=$

$\left|(\alpha-1)^2+1\right|=(\alpha-1)^2+1\geq 1$ γιατί $(\alpha-1)^2\geq 0$

12941.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f. **(Μονάδες 6)**

β) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x)=3+|x|$. **(Μονάδες 5)**

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες. **(Μονάδες 6)**

δ) Αν $g(x)=3-x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. **(Μονάδες 8)**

Λύση

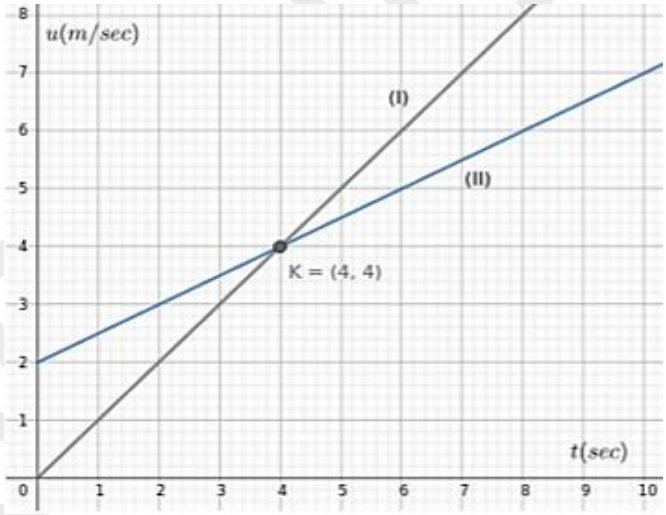
α) Για να ορίζεται η f πρέπει $3-|x|\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 3 \Leftrightarrow x\neq \pm 3$, άρα $A_f=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$.

β) Είναι $f(x)=\dfrac{9-x^2}{3-|x|}=\dfrac{9-|x|^2}{3-|x|}=f(x)=\dfrac{\cancel{(3-|x|)}(3+|x|)}{\cancel{3-|x|}}=3+|x|$

γ) Για $y=0$ είναι $f(x)=0\Leftrightarrow 3+|x|=0\Leftrightarrow |x|=-3$ αδύνατη. Άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα x΄x.
Είναι $f(0)=3+|0|=3$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,3).

δ) Αρκεί για κάθε $x\neq\pm 3$, η εξίσωση $f(x)=g(x)$ να έχει ακριβώς μια λύση. Είναι
$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \cancel{3}+|x|=\cancel{3}-x^2\Leftrightarrow |x|=-|x|^2\Leftrightarrow |x|^2+|x|=0\Leftrightarrow |x|(|x|+1)=0\Leftrightarrow$
$(|x|=0\Leftrightarrow x=0)$ ή $(|x|+1=0\Leftrightarrow |x|=-1$ αδύνατη$)$
Άρα το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι το (0, 3).

12999.Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u=u_0+\alpha\cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και α η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

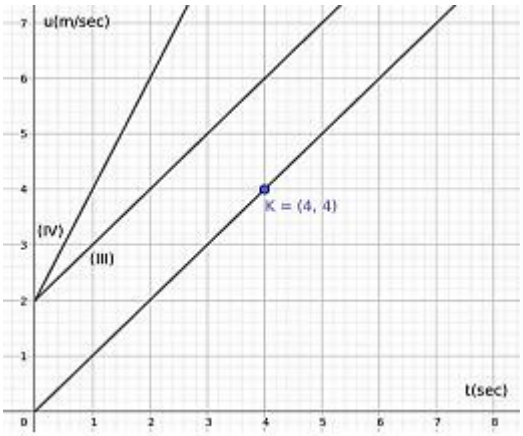


α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής. (Μονάδες 6)
β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec.
Οι παρακάτω ευθείες (Ι),(ΙΙ) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.
i) Ποια από τις δύο ευθείες (Ι), (ΙΙ) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β; (Μονάδες 6)
ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec , $t\in[3,5]$. (Μονάδες 7)
iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η ταχύτητα u .
Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικός, το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτηση είναι $t\in[0,+\infty)$.

β) i) Εφόσον το όχημα Α ξεκινά από θέση ηρεμίας, η αρχική του αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (Ι). Αντίστοιχα, εφόσον το όχημα Β ξεκινά με αρχική ταχύτητα 2m/sec αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (ΙΙ).



ii) Τις χρονικές στιγμές από 3 έως 4 sec το όχημα της γραμμής (ΙΙ) κινείται ταχύτερα. Τη χρονική στιγμή t=4sec τα δύο οχήματα έχουν την ίδια ταχύτητα, ενώ τις χρονικές στιγμές από 4 έως 5 sec το όχημα της γραμμής (Ι) κινείται ταχύτερα.

iii) Επειδή το όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, σε κάθε χρονική στιγμή η ταχύτητά του θα είναι μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α, οπότε η ευθεία (ΙΙΙ) δεν τέμνει την ευθεία (Ι) που περιγράφει την κίνηση του οχήματος Α. Εφόσον, αυτή ξεκινά από το σημείο Λ(0,2), θα πρέπει η κλίση της να είναι μεγαλύτερη από την κλίση της ευθείας (Ι).
Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο ευθείες:
η (ΙΙΙ) περιγράφει όχημα που εκτελεί Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση ίση με του οχήματος Α, ενώ η ευθεία (IV) περιγράφει την κίνηση ενός οχήματος με επιτάχυνση μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α.

13120.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-(\lambda-1)x-4\lambda^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 8)**

β) Για $\lambda\neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$. **(Μονάδες 5)**

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου Α(4,4) ως προς τον άξονα x΄x να ανήκει στη γραφική παράσταση της f. **(Μονάδες 7)**

δ) Για $\lambda=-1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Για να υπάρχουν δύο σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x΄x θα πρέπει η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

Η f είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=(\lambda-1)^2-4\cdot1\cdot(-4\lambda^2)=(\lambda-1)^2+16\lambda^2$.

Επειδή για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι $\Delta>0$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

β) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου είναι $P=-4\lambda^2<0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες για κάθε $\lambda\neq 0$.

γ) Το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τον άξονα x΄x είναι το Α΄(4, −4) και ανήκει στη γραφική παράσταση της f όταν $f(4)=-4\Leftrightarrow 16-4(\lambda-1)-4\lambda^2=-4\overset{:4}{\Leftrightarrow}4-\lambda+1-\lambda^2=-1\Leftrightarrow 0=\lambda^2+\lambda-6$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=25$ και ρίζες

$$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{2}=2,\ \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{25}}{2}=-3.$$

δ) Για $\lambda=-1$ είναι $f(x)=x^2+2x-4$. Πρέπει $f(x)<0\Leftrightarrow x^2+2x-4<0$

Το τριώνυμο x^2+2x-4 έχει Δ= 20 και ρίζες

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}=\frac{-2+\sqrt{4\cdot5}}{2}=\frac{-2+2\sqrt{5}}{2}=\frac{2\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}=-1+\sqrt{5},$$

$$x_2=\frac{-2-\sqrt{20}}{2}=\frac{-2-\sqrt{4\cdot 5}}{2}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{2}=\frac{2\left(-1-\sqrt{5}\right)}{2}=-1-\sqrt{5}$$

Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι:

$$f(x)<0\Leftrightarrow x^2+2x-4<0\Leftrightarrow x\in\left(-1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5}\right)$$

x	$-\infty$ $-1-\sqrt{5}$ $-1+\sqrt{5}$ $+\infty$
$f(x)$	+ 0 − 0 +

13313. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^7-x}{x^3-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f. **(Μονάδες 6)**

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες x΄x και y΄y. **(Μονάδες 6)**

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^4+x^2+1$ για κάθε $x\in A$. **(Μονάδες 6)**

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=3$ έχει λύση στο Α. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x^3-x\neq 0\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$ και $x^2\neq 1\Leftrightarrow x\neq\pm 1$, άρα

$A=\mathbb{R}-\{0,\pm 1\}$.

β) Επειδή το 0 δεν περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f, η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον άξονα y΄y. $f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^7-x}{x^3-x}=0\Leftrightarrow x^7-x=0\Leftrightarrow x\left(x^6-1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ απορρίπτεται ή $x^6=1\Leftrightarrow x=\pm 1$ απορρίπτονται. Άρα η C_f δεν τέμνει ούτε τον άξονα x΄x.

γ) $$f(x)=\frac{x^7-x}{x^3-x}=\frac{\cancel{x}\left(x^6-1\right)}{\cancel{x}\left(x^2-1\right)}=\frac{\left(x^2\right)^3-1^3}{x^2-1}=\frac{\cancel{\left(x^2-1\right)}\left[\left(x^2\right)^2+x^2\cdot 1+1^2\right]}{\cancel{x^2-1}}=x^4+x^2+1$$

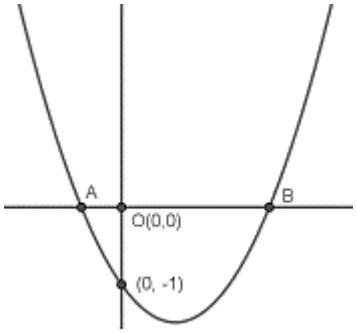
δ) $f(x)=3\Leftrightarrow x^4+x^2+1=3\Leftrightarrow x^4+x^2-2=0\ (1)$

Θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ= 9 και ρίζες ω = 1 δεκτή ή ω = -2 απορρίπτεται

Τότε $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$ απορρίπτονται, οπότε η εξίσωση $f(x)=3$ δεν έχει λύση στο Α.

13168. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+2\lambda x+\gamma$ με $x\in\mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο (0, −1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma=-1$ **(Μονάδες 5)**

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y=-\lambda^2-1$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία Α και Β με συντεταγμένες $A\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2+1},0\right)$ και $B\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1},0\right)$. **(Μονάδες 7)**

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των Α και Β είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) i. Επειδή η C_f τέμνει τον άξονα y′y στο $(0,-1)$, ισχύει ότι $f(0)=-1\Leftrightarrow \gamma=-1$.

ii. Για να μην είναι η γραφική παράσταση της f κάτω από την ευθεία $y=-\lambda^2-1$, πρέπει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ να είναι $f(x)\geq -\lambda^2-1$.

Είναι $f(x)\geq -\lambda^2-1\Leftrightarrow x^2+2\lambda x-1\geq -\lambda^2-1\Leftrightarrow x^2+2\lambda x+\lambda^2\geq 0\Leftrightarrow (x+\lambda)^2\geq 0$ ισχύει

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x′x είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0\Leftrightarrow x^2+2\lambda x-1=0$

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=4\lambda^2+4=4(\lambda^2+1)>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-2\lambda\pm\sqrt{4(\lambda^2+1)}}{2}=\frac{-2\lambda\pm 2\sqrt{\lambda^2+1}}{2}=\frac{\cancel{2}\left(-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+1}\right)}{\cancel{2}}=\begin{cases}x_1=-\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}\\ x_2=-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\end{cases}$$

Οπότε τα σημεία είναι τα $A\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2+1},0\right)$ και $B\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1},0\right)$.

γ) Επειδή τα σημεία Α και Β βρίσκονται στον άξονα x΄x, είναι:

$$d(A,B)=(AB)=|x_2-x_1|=\left|-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}+-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right|=\left|2\sqrt{\lambda^2+1}\right|=2\sqrt{\lambda^2+1}\quad(\sqrt{\lambda^2+1}>0)$$

Πρέπει $d(A,B)\geq 2\Leftrightarrow 2\sqrt{\lambda^2+1}\geq 2\Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+1}\geq 1\Leftrightarrow \lambda^2+1\geq 1\Leftrightarrow \lambda^2\geq 0$ ισχύει

13479. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|3x-12|-|2x-8|-3|x^2-16|$.

Αν $|x|\leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές. **(Μονάδες 9)**

β) Αν $f(x)=3x^2-x-44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. **(Μονάδες 8)**

ii. Αν το σημείο Μ(μ+ 1, −20) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να βρείτε την ακέραια τιμή του μ. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $|x|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq x\leq 4\Leftrightarrow -12\leq 3x\leq 12\Leftrightarrow -24\leq 3x-12\leq 0$ (1)

$|x|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq x\leq 4\Leftrightarrow -8\leq 2x\leq 8\Leftrightarrow -16\leq 2x-8\leq 0$ (2)

$|x|\leq 4\Leftrightarrow x^2\leq 16\Leftrightarrow x^2-16\leq 0$ (3). Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι

$f(x)=-3x+12+2x-8-3(-x^2+16)=-x+4+3x^2-48=3x^2-x-44$

β) i. $f(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-x-44=0$

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με Δ=529 και ρίζες $x_1=4$, $x_2=-\frac{11}{3}$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $(4,0)$ και $\left(-\frac{11}{3},0\right)$. Είναι $f(0)=-44$ οπότε η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,-44).

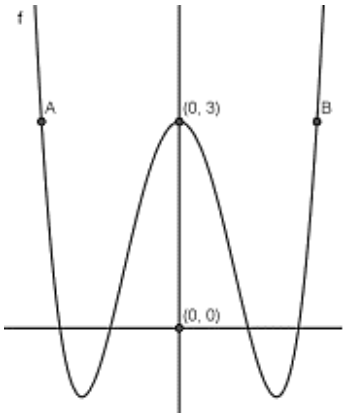
ii. Επειδή το Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της f ισχύει ότι:

$f(\mu+1)=-20\Leftrightarrow 3(\mu+1)^2-(\mu+1)-44=-20\Leftrightarrow 3\mu^2+6\mu+3-\mu-1-24=0\Leftrightarrow 3\mu^2+5\mu-22=0$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με Δ=289 και ρίζες μ=2 ή $\mu=-\frac{11}{3}$.

Από τις παραπάνω τιμές του μ δεκτή είναι η μ = 2 καθώς είναι ακέραια και επιπλέον $(\mu+1)\in[-4,4]$.

13454.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha x^4-4x^2+\gamma$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y.



α) Να δείξετε ότι γ = 3. (Μονάδες 6)

β) Αν $A(\alpha^2-3,3)$ και $B(5-3\alpha,3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι α = 1 και να γράψετε τον τύπο της f. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x′x. (Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα x′x. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Επειδή το σημείο (0, 3) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f, ισχύει ότι
$f(0)=3\Leftrightarrow \alpha\cdot 0^4-4\cdot 0^2+\gamma=3\Leftrightarrow \gamma=3$.

β) Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον y′y και τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τεταγμένη, θα είναι και αυτά συμμετρικά ως προς τον y′y. Άρα:
$\alpha^2-3=-(5-3\alpha)\Leftrightarrow \alpha^2-3=-5+3\alpha\Leftrightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ=1 και ρίζες $\alpha_1=1,\ \alpha_2=2$.

Επειδή το σημείο Α ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο πρέπει: $\alpha^2-3<0$.
Για α = 2 είναι $2^2-3=1>0$ άρα η λύση α = 2 απορρίπτεται.
Για α = 1 είναι $1^2-3=-2<0$ άρα η λύση α = 1 είναι δεκτή. Οπότε, ο τύπος της f είναι:
$f(x)=x^4-4x^2+3$

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0\Leftrightarrow x^4-4x^2+3=0$. Θέτουμε $x^2=\omega$ και γίνεται $\omega^2-4\omega+3=0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ= 4 και ρίζες $\omega_1=1,\ \omega_2=3$.

Άρα $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$ ή $x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

δ) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον x′x όταν:
$-\sqrt{3}<x<-1$ ή $1<x<\sqrt{3}$

14190.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha\neq-\frac{1}{2}$ τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha-1$ έχουν την ίδια τεταγμένη. (Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη β > 0. Από το Μ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες x΄x, y΄y και έστω Α και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το Α ανήκει στον x΄x και το Δ στον y΄y .

Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΑΜΔ είναι $\left[\sqrt{2}(\beta+1)\right]^2$. (Μονάδες 9)

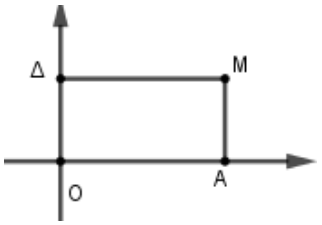
Λύση

α) Η f είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3$, άρα $f(x)=x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $f(-\alpha-1)=(-\alpha-1)^2+(-\alpha-1)+1=\alpha^2+2\alpha+1-\alpha-1+1=\alpha^2+\alpha+1=f(\alpha)$ άρα για

οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha-1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

γ) Το Μ έχει συντεταγμένες $(\beta, f(\beta))$.Οι προβολές Α, Δ του Μ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα έχουν συντεταγμένες $A(\beta,0)$ και $\Delta(0, f(\beta))$. Το ορθογώνιο ΟΑΜΔ έχει περίμετρο:



$\Pi = 2(OA) + 2(O\Delta) = 2\beta + 2f(\beta) = 2\beta + 2\beta^2 + 2\beta + 2 \Leftrightarrow$

$\Pi = 2\beta^2 + 4\beta + 2 = 2(\beta^2 + 2\beta + 1) = 2(\beta+1)^2 = \left[\sqrt{2}(\beta+1)\right]^2$

14225.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α. **(Μονάδες 5)**

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8, x \in A$. **(Μονάδες 7)**

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία y = 3. **(Μονάδες 6)**

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

β) $f(x) = \frac{(x-2)(x^2-x-4x+4)}{x-1} = \frac{(x-2)(x(x-1)-4(x-1))}{x-1} = \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{x-1}} \Leftrightarrow$

$f(x) = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8,\ x \in A$

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία y = 3 όταν $f(x) \leq 3 \Leftrightarrow$

$x^2 - 6x + 8 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Το τριώνυμο $x^2 - 6x + 5$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1$ και ρίζες $x = 1, x = 5$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Επομένως $x^2 - 6x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$.

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
x^2-6x+5	+	0	-	0	+

δ) Οι τετμημένες των χημείων τομής είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = x^4 - 6x - 4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$ (1)

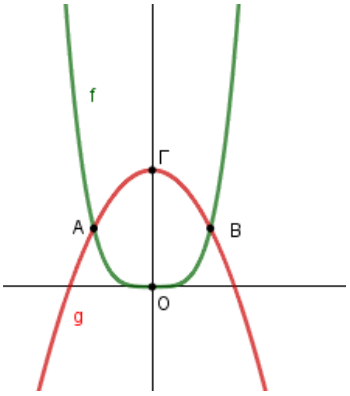
Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2 - \omega - 12 = 0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 49$ και ρίζες $\omega = 4$ δεκτή ή $\omega = -3$ απορρίπτεται

Άρα $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Για x = 2 είναι $f(2) = 2^2 - 6\cdot 2 + 8 = 0$ και για $x = -2$ είναι $f(-2) = (-2)^2 - 6\cdot(-2) + 8 = 24$, οπότε κοινά σημεία είναι τα $(2,0)$ και $(-2,24)$.

14307.Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4$ και $g(x)=2-x^2$. Τα σημεία ΑΒ, είναι τα σημεία τομής των γραφικών παρατάσεων των f g, ενώ Γ είναι τ0 σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα y΄y.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ. **(Μονάδες 9)**

Αν $A(-1,1), B(1,1), \Gamma(0,2)$

β) Με βάση το διπλανό σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g. **(Μονάδες 6)**

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β). **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής της C_g με τον y΄y, οπότε $g(0)=2-0^2=2$, άρα Γ(0,2).

Οι τετμημένες των σημείων Α, Β είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^4=2-x^2\Leftrightarrow x^4+x^2-2=0$ (1)

Θέτουμε $x^2=\omega>0$ και η (1) γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta=9$ και ρίζες $\omega=1$ δεκτή ή $\omega=-2$ απορρίπτεται

Άρα $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$.

Για x = 1 είναι $f(1)=1^4=1$ και για $x=-1$ είναι $f(-1)=(-1)^4=1$, οπότε κοινά σημεία είναι τα $B(1,1)$ και $A(-1,1)$.

β) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων Α,Β δηλαδή για $x\in(-1,1)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^4<2-x^2\Leftrightarrow x^4+x^2-2<0$.

Θέτουμε $x^2=\omega>0$ και η (1) γίνεται $\omega^2+\omega-2<0\Leftrightarrow\omega^2+\omega-1-1<0\Leftrightarrow(\omega-1)(\omega+1)+(\omega-1)<0\Leftrightarrow$

$(\omega-1)(\omega+1+1)<0\Leftrightarrow(\omega-1)(\omega+2)<0\overset{\omega+2>0}{\Leftrightarrow}\omega-1<0\Leftrightarrow\omega<1\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow|x|<1\Leftrightarrow-1<x<1$ που επαληθεύει την απάντηση στο β ερώτημα.

14665.Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^3$ που τέμνονται στα σημεία Α και Β.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β. **(Μονάδες 8)**

β) Με βάση το σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $x^3<x^2$. **(Μονάδες 6)**

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 5)**

δ) Για τον πραγματικό αριθμό π = 3,1415… να δείξετε ότι:

i. $(\pi-3)^3<(\pi-3)^2$ **(Μονάδες 3)**

ii. $\pi^3-10\pi^2+33\pi-36<0$ **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία Α και Β, άρα οι τετμημένες των σημείων Α και Β θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2=x^3\Leftrightarrow x^2-x^3=0\Leftrightarrow x^2(1-x)=0\Leftrightarrow(x^2=0\Leftrightarrow x=0)$ ή $(1-x=0\Leftrightarrow x=1)$.

Για x = 0 είναι $f(0)=g(0)=0$, άρα A(0,0) και για x = 1 είναι $f(1)=g(1)=1$, άρα B(1,1).

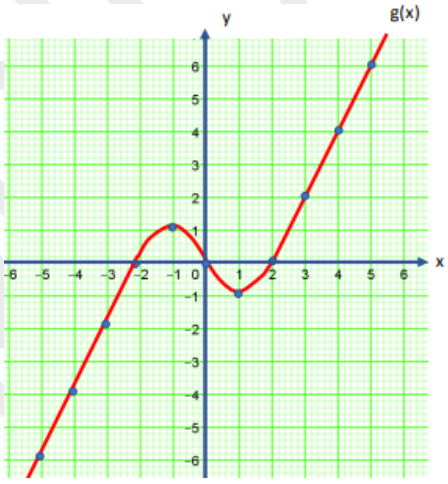
β) Για να ισχύει $x^3<x^2$ πρέπει η γραφική παράσταση της g να βρίσκεται κάτω από αυτή της f. Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x\in(0,1)$, δηλαδή μεταξύ των σημείων A και B, η C_g βρίσκεται κάτω από τη C_f, άρα για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $x^3<x^2$.

γ) Όχι δεν είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του αφού στο προηγούμενο σκέλος δείξαμε ότι για τον αριθμό $x\in(0,1)$ ισχύει $x^3<x^2$.

δ) i. Είναι $(\pi-3)\in(0,1)$, οπότε με βάση το β σκέλος είναι $(\pi-3)^3<(\pi-3)^2$.

ii. Είναι $(\pi-3)^3<(\pi-3)^2\Leftrightarrow\pi^3-9\pi^2+27\pi-27<\pi^2-6\pi+9\Leftrightarrow\pi^3-10\pi^2+33\pi-36<0$.

14745. δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g(x). Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.



α) Να λύσετε την ανίσωση $-2\le g(x)\le 0$. **(Μονάδες 6)**

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)|\le 2$. **(Μονάδες 7)**

γ) i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x)=\frac{4}{5}$ και $g(x)=-1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x)=k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες g(x) κυμαίνονται από – 2 έως μηδέν. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $x\in[-3,-2]\cup[0,2]$.

β) $|g(x)|\le 2\Leftrightarrow -2\le g(x)\le 2$. Ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες g(x) κυμαίνονται από – 2 έως 2. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $x\in[-3,3]$.

γ) i. Ελέγχουμε πόσα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τεταγμένη $y=\frac{4}{5}$ και διαπιστώνουμε ότι αυτά είναι 3, άρα η εξίσωση $g(x)=\frac{4}{5}$ έχει 3 λύσεις.

Αντίστοιχα ελέγχουμε πόσα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τεταγμένη $y=-1$ και διαπιστώνουμε ότι αυτά είναι 2, άρα η εξίσωση $g(x)=-1$ έχει 2 λύσεις.

ii. Το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x)=k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k, ταυτίζεται με το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας y = k (παράλληλη προς τον άξονα $x'x$) με την γραφική παράσταση. Αποτυπώνουμε τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα.

Τιμές του k	Πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$
$k < -1$ ή $k > 1$	1
$k = -1$ ή $k = 1$	2
$-1 < k < 1$	3

14760.Δίνεται η συνάρτηση: $g(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x-12}}\right]^3\cdot\left(x^2-16\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g. **(Μονάδες 8)**

β) Να δείξετε ότι $g(x)=\frac{x+4}{x+3}$ **για κάθε *x* στο πεδίο ορισμού της.** **(Μονάδες 9)**

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει $x^2-x-12>0$.

Το τριώνυμο x^2-x-12 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-12)=1+48=49$ και ρίζες

$x_1=\frac{1+7}{2}=4,\ x_2=\frac{1-7}{2}=-3$.

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
x^2-x-12	+	0	–	0	+

Με βάση το πρόσημο του τριωνύμου που φαίνεται στον διπλανό πίνακα, είναι $x^2-x-12>0\Leftrightarrow x<-3$ ή $x>4$, άρα $A_g=(-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$.

β) Για κάθε $x\in A_g$ είναι $g(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x-12}}\right]^3\cdot\left(x^2-16\right)=\frac{1}{x^2-x-12}\cdot\left(x^2-16\right)=\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{(x+3)\cancel{(x-4)}}\Leftrightarrow$

$g(x)=\frac{x+4}{x+3}$

γ) Είναι $g(x)=0\Leftrightarrow\frac{x+4}{x+3}=0\Leftrightarrow x+4=0\Leftrightarrow x=-4$ δεκτή.

Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $(-4,0)$, δεν τέμνει τον y΄y αφού το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της .

14810.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-7x+\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$ **της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη y = 10.**

α) Να αποδείξετε ότι κ = 10. **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f **της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x .** **(Μονάδες 6)**

γ) Έστω $A(\alpha,f(\alpha))$ **και** $B(\beta,f(\beta))$, $\alpha<\beta$ **δυο σημεία της** C_f **που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x .**

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha<\frac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta$. **(Μονάδες 6)**

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f **με τετμημένη** $x_0=\frac{2\alpha+3\beta}{5}$ **βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα x΄x.** **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $(0,10)$ είναι $f(0)=10\Leftrightarrow\kappa=10$.

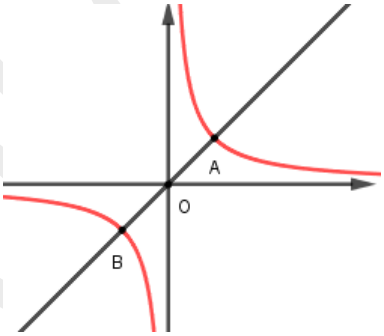
β) $f(x)<0 \Leftrightarrow x^2-7x+10<0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5)<0 \Leftrightarrow 2<x<5$

γ) i. $\alpha<\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta \Leftrightarrow 5\alpha<2\alpha+3\beta<5\beta \Leftrightarrow \begin{cases}5\alpha<2\alpha+3\beta\\2\alpha+3\beta<5\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5\alpha-2\alpha<+3\beta\\2\alpha<5\beta-3\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\alpha<3\beta\\2\alpha<2\beta\end{cases} \Leftrightarrow \alpha<\beta$ ισχύει

ii. Επειδή τα σημεία Α , Β βρίσκονται κάτω από τον x΄x, είναι $2<\alpha<\beta<5$.

Επειδή $\alpha<\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta$, είναι $2<\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}<5$, οπότε το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0=\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

14925.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και η ευθεία ΑΒ με εξίσωση $y=x$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α, Β και να δείξετε ότι το Ο είναι το μέσο του ΑΒ. **(Μονάδες 9)**

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f.

β) Να δείξετε ότι το συμμετρικό Μ΄του Μ ως προς το Ο(0,0) ανήκει στη γραφική παράσταση της f. **(Μονάδες 8)**

γ) Αν $A(1,1),B(-1,-1),M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB)\le(MM')$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB)=(MM')$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Οι συντεταγμένες των σημείων Α,Β είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases}y=x\\y=\dfrac{1}{x}\end{cases}$.

Είναι $x=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$.

Αν x = 1, τότε y = 1 και Α(1,1), ενώ αν x = -1, τότε y = - 1 και $B(-1,-1)$.

Το μέσο του ΑΒ έχει τετμημένη $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1-1}{2}=0$ και τεταγμένη $\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1-1}{2}=0$, δηλαδή είναι το Ο.

β) Επειδή το Μ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f, είναι $y=\dfrac{1}{x}$.

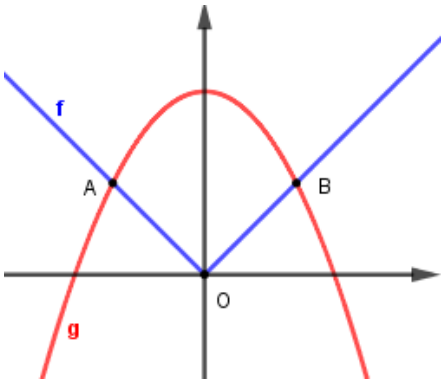
Το $M'(-x,-y)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν $-y=\dfrac{1}{-x} \Leftrightarrow -y=-\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x}$ που ισχύει.

γ) $(AB)\le(MM') \Leftrightarrow \sqrt{(-1-1)^2+(-1-1)^2}\le\sqrt{(-x-x)^2+(-y-y)^2} \Leftrightarrow \sqrt{8}\le\sqrt{4x^2+4y^2} \Leftrightarrow$

$8\le4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow 2\le x^2+\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2\le x^4+1 \Leftrightarrow x^4-2x^2+1\ge0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2\ge0$ ισχύει.

Η ισότητα $(AB)=(MM')$ ισχύει όταν $(x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$ που σημαίνει ότι ισχύει όταν τα σημεία Μ, Μ΄ ταυτίζονται με τα σημεία Α, Β.

14926.Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ και $g(x)=2-x^2$.



Τα Α, Β είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β. **(Μονάδες 10)**

β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι : $f(x)<g(x)$. **(Μονάδες 6)**

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x)<g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Οι συντεταγμένες των σημείων Α,Β είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} y=|x| \\ y=2-x^2 \end{cases}$.

Είναι $|x|=2-x^2 \Leftrightarrow x^2+|x|-2=0 \Leftrightarrow |x|^2+|x|-2=0$ (1)

Θέτουμε $|x|=\omega>0$ και η (1) γίνεται: $\omega^2+\omega-2=0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=9$ και ρίζες

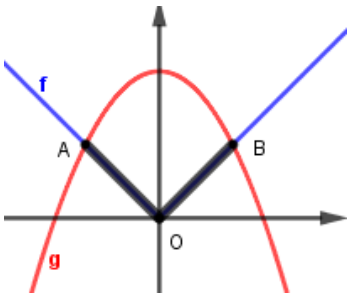
$\omega_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$ δεκτή, $\omega_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2$ απορρίπτεται.

Άρα $|x|=1 \Leftrightarrow x=\pm1$.

Αν x = 1, τότε $y=|1|=1$, οπότε το Β έχει συντεταγμένες (1,1).

Αν x = -1, τότε $y=|-1|=1$, οπότε το Α έχει συντεταγμένες (-1,1).

β) i. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων της f που βρίσκονται κάτω από τη g.Τα σημεία αυτά βρίσκονται μεταξύ των Α και Β όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, οπότε οι λύσεις είναι $x\in(-1,1)$.

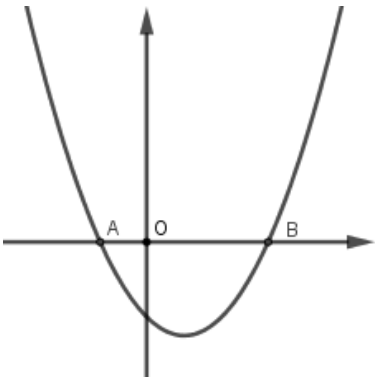


ii. $f(x)<g(x) \Leftrightarrow |x|<2-x^2 \Leftrightarrow x^2+|x|-2<0 \Leftrightarrow |x|^2+|x|-2<0 \Leftrightarrow$

$\omega^2+\omega-2<0 \Leftrightarrow -2<\omega<1 \Leftrightarrow -2<|x|<1 \Leftrightarrow (|x|>-2$ ισχύει$)$ και

$|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$ που επαληθεύει την απάντηση στο βi ερώτημα.

14961. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-1$.



Αν Α(ω,0), Β(φ,0)

α) Να δείξετε ότι

i. $\omega+\varphi=1$ **(Μονάδες 4)**

ii. $\omega\cdot\varphi=-1$ **(Μονάδες 4)**

β) Να δείξετε ότι $(OB)>(OA)$. **(Μονάδες 6)**

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι β > φ. **(Μονάδες 6)**

δ) Να δείξετε ότι $\varphi<\dfrac{5}{3}$. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α, Β, οι τετμημένες τους ω, φ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$

Από τους τύπους του Vieta είναι $S=-\frac{-1}{1}=1$ και $P=\frac{-1}{1}=-1$, άρα

i. $S=\omega+\varphi=1$ και **ii.** $P=\omega\cdot\varphi=-1$

β) Επειδή το Ο βρίσκεται μεταξύ των Α και Β, είναι $\omega<0<\varphi$.

Είναι $(OB)=|\varphi|=\varphi$ και $(OA)=|\omega|=-\omega$.

$(OB)>(OA) \Leftrightarrow \varphi>-\omega \Leftrightarrow \varphi+\omega>0 \Leftrightarrow 1>0$ που ισχύει

γ) Επειδή ο β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του ισχύει ότι $\beta>\frac{1}{\beta}$. Επειδή η διαφορά τους

ξεπερνάει τη μία μονάδα, ισχύει ότι $\beta-\frac{1}{\beta}>1 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta^2-1>\beta \Leftrightarrow \beta^2-\beta-1>0 \Leftrightarrow f(\beta)>0$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με θετική τετμημένη είναι αυτά που βρίσκονται αριστερά του Α ή δεξιά του Β, άρα β< ω ή β > φ. Επειδή β > 0, είναι β > φ.

δ) Είναι $\frac{5}{3}-\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}-\frac{3}{5}=\frac{16}{5}>1$, οπότε με βάση το ερώτημα γ είναι $\frac{5}{3}>\varphi$.

Θέμα 3

14754. α) Να δείξετε ότι $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\frac{x^3-8}{x-2}\right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α. **(Μονάδες 4)**

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2+2x+4$ για κάθε $x\in A$. **(Μονάδες 6)**

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g, όπου $g(x)=6x$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Το τριώνυμο x^2+2x+4 έχει $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot4=4-16=-12<0$, οπότε $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Για να ορίζεται η f πρέπει $x-2\neq0 \Leftrightarrow x\neq2$, άρα $A=\mathbb{R}-\{2\}$.

γ) Για κάθε $x\in A$ είναι $f(x)=\left|\frac{x^3-8}{x-2}\right|=\left|\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}\right|=|x^2+2x+4|=x^2+2x+4$.

δ) Για κάθε $x\in A$ είναι

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+2x+4=6x \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ απορρίπτεται

οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f g, δεν έχουν κοινά σημεία.

14752.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α. **(Μονάδες 10)**

β) Να δείξετε ότι το σημείο $M\left(1,-\sqrt{2}\right)$ **ανήκει στη γραφική παράσταση της f .** **(Μονάδες 5)**

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x, y΄y . **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$ και $x^2-5x+6\geq 0$.

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει $\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$ και

ρίζες $x_1=\dfrac{5+1}{2}=3,\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=2$.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	0	−	0 +

Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι

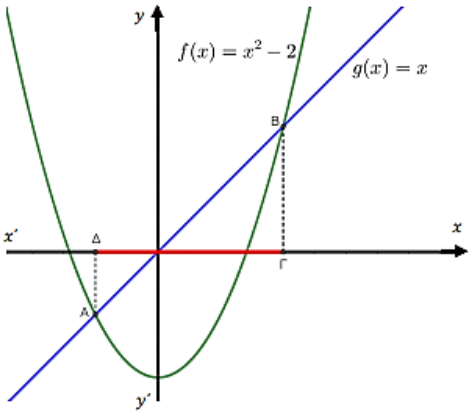
$x^2-5x+6\geq 0\Leftrightarrow x\leq 2$ ή $x\geq 3$

Τελικά $A=(-\infty,2)\cup[3,+\infty)$.

β) Είναι $f(1)=\dfrac{\sqrt{1^2-5\cdot 1+6}}{1-2}=\dfrac{\sqrt{2}}{-1}=-\sqrt{2}$, οπότε το σημείο $M\left(1,-\sqrt{2}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}=0\Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+6}=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2$ απορρίπτεται ή $x=3$ και $f(0)=\dfrac{\sqrt{6}}{-2}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Η γραφική παράσταση της f ει τον άξονα x΄x στο σημείο (3,0) και τον y΄y, στο σημείο $\left(0,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

14673. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2-2$ **και** $g(x)=x$.



α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι $A(-1,-1)$ **και** $B(2,2)$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-x-2<0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2-|\omega|-2<0$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία Α και Β, άρα οι τετμημένες των σημείων Α και Β θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-2=x\Leftrightarrow x^2-x-2=0$, $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$ και $x_1=-1,\ x_2=2$.

Για $x=-1$ είναι $f(-1)=g(-1)=-1$, οπότε $A(-1,-1)$ και για $x=2$ είναι $f(2)=g(2)=2$ οπότε $B(2,2)$.

β) Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι $x^2-x-2<0 \Leftrightarrow -1<x<2$.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
x^2-x-2	+	0	−	0	+

γ) $\omega^2-|\omega|-2<0 \Leftrightarrow |\omega|^2-|\omega|-2<0$ (1). Θέτουμε $|\omega|=x$ και η (1) γίνεται $x^2-x-2<0 \Leftrightarrow -1<x<2$.
Άρα $-1<|\omega|<2 \Leftrightarrow |\omega|>-1$ ισχύει και $|\omega|<2 \Leftrightarrow -2<\omega<2$.

14604. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\le 3 \\ x^2, & 3<x<10 \end{cases}$.

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. **(Μονάδες 6)**
β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(3)$ **και** $f(5)$**.** **(Μονάδες 6)**
γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 6)**
δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη y = 21. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) $A=(-\infty,10)$.

β) $f(-1)=2(-1)-5=-7$, $f(3)=2\cdot 3-5=1$ και $f(5)=5^2=25$

γ) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0)=0$.
Όμως $f(0)=2\cdot 0-5=-5$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Έχουμε δυο περιπτώσεις: Για $x\le 3$ είναι $f(x)=21 \Leftrightarrow 2x-5=21 \Leftrightarrow 2x=26 \Leftrightarrow x=13$ απορρίπτεται και για $x>3$ είναι $f(x)=21 \Leftrightarrow x^2=21 \Leftrightarrow x=\sqrt{21}$.
Κατά συνέπεια το ζητούμενο σημείο είναι $(\sqrt{21},21)$.

Askisopolis

Η συνάρτηση y=αx+β

2ο θέμα

1241.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 6), Β(-1, 4), να βρείτε τις τιμές των α, β. (Μονάδες 13)

β) Αν α=1 και β=5, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1, 6) αν και μόνο αν:
$f(1) = 6 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta = 6 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 6 \Leftrightarrow \beta = 6 - \alpha$ (1)
Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Β(– 1, 4) αν και μόνο αν:
$f(-1) = 4 \Leftrightarrow \alpha \cdot (-1) + \beta = 4 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -\alpha + 6 - \alpha = 4 \Leftrightarrow -2\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = 1$
Αντικαθιστούμε την τιμή α = 1 στη σχέση (1) και βρίσκουμε: $\beta = 6 - 1 \Leftrightarrow \beta = 5$
Για α = 1 και β = 5, ο τύπος της f γράφεται f(x) = x + 5.

β) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(– 5, 0).
Επίσης έχουμε: f(0) = 0 + 5 = 5 Άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0, 5).

1294. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0)=5$ και $f(1)=3$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=5$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

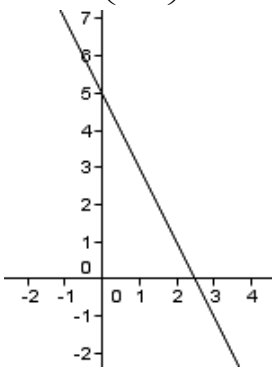
Λύση

α) $f(1)=3 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1+\beta=3 \overset{\beta=5}{\Leftrightarrow} \alpha+5=3 \Leftrightarrow \alpha=-2$, $f(0)=5 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0+\beta=5 \Leftrightarrow \beta=5$

β) Είναι $f(x)=-2x+5$.
Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση : $f(x)=0 \Leftrightarrow -2x+5=0 \Leftrightarrow -2x=-5 \Leftrightarrow x=\frac{-5}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι το σημεία $A\left(\frac{5}{2},0\right)$.

Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημεία (0,f(0)). Επειδή $f(0)=5$ το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο Γ(0,5)



γ) Για τη κατασκευή της γραφικής παράστασης της f, αρκεί να χαράξουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Γ.

1301. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. (Μονάδες 13)

β) Αν Α, Ο, Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου Ο(0,0), να αποδείξτε ότι Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. Είναι:

$x^3=x \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

$f(0)=g(0)=0,\ f(1)=g(1)=1,\ f(-1)=g(-1)=-1$.

Άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα O(0,0),A(1,1) και B(-1,-1)

β) Είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων γιατί έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

12856. Δίνεται ευθεία ε: y=αx+5.Αν η ευθεία δ : $y=-3x-6$ είναι παράλληλη στην (ε), τότε:

α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε. **(Μονάδες 6)**

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x; **(Μονάδες 7)**

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) i. Επειδή ε//δ τότε οι δύο ευθείες θα έχουν την ίδια κλίση. Η κλίση της ευθείας δ είναι -3. Άρα α=-3, δηλαδή η κλίση της ευθείας ε είναι -3.

ii) Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον x΄x είναι αμβλεία διότι η κλίση της ε είναι α=-3<0

β) Η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=-3x+5$. Η ευθεία τέμνει τον άξονα x΄x σε σημείο με τεταγμένη y=0.

Για y=0 έχουμε: $-3x+5=0 \Leftrightarrow -3x=-5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$.

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα x΄x είναι το $\left(\frac{5}{3},0\right)$.

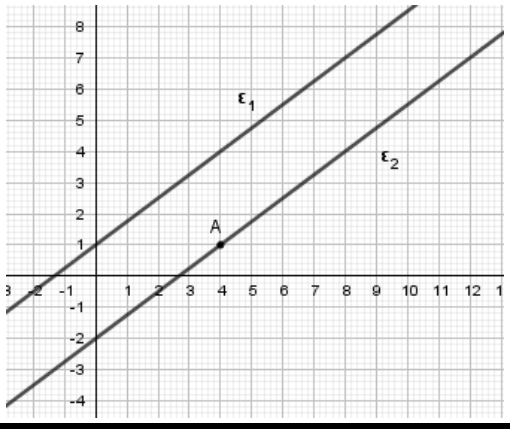
Η ευθεία τέμνει τον άξονα y΄y σε σημείο με τετμημένη x=0. Για x=0 έχουμε: y=5.
Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα y΄y είναι το (0,5).

2.12631. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την ($ε_1$) με εξίσωση $y=\frac{3}{4}x+1$ και την ($ε_2$) που διέρχεται από το σημείο Α (4, 1) και είναι παράλληλη στην ($ε_1$).

α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας ($ε_2$). **(Μονάδες 7)**

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ($ε_2$). **(Μονάδες 9)**

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ($ε_2$) με τους άξονες. **(Μονάδες 9)**



Λύση

α) Η ευθεία ($ε_1$) έχει κλίση $\alpha_1=\frac{3}{4}$ και η ευθεία ($ε_2$) είναι παράλληλη στην ($ε_1$), οπότε έχει κλίση $\alpha_2=\alpha_1=\frac{3}{4}$.

β) Η ευθεία ($ε_2$) έχει εξίσωση: $y=\frac{3}{4}x+\beta$ και διέρχεται από το σημείο Α(4, 1), οπότε οι συντεταγμένες του

επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή: $1=\frac{3}{4}\cdot 4+\beta \Leftrightarrow 1=3+\beta \Leftrightarrow -2=\beta$.

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=\frac{3}{4}x-2$.

γ) Η ευθεία τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, -2), αφού για x = 0 βρίσκουμε $y=\frac{3}{4}\cdot 0-2=-2$.

Για y = 0 είναι: $0=\frac{3}{4}x-2 \Leftrightarrow 2=\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x=8 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$, οπότε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $\left(\frac{8}{3},0\right)$.

12684. Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y=-\frac{1}{2}x-2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο Α (- 4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα y΄ y. **(Μονάδες 9)**

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 7)**

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες; **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Η ευθεία (ε_1) έχει κλίση $\alpha_1=-\frac{1}{2}$.

Για x = 0 είναι $y=-\frac{1}{2}\cdot 0-2=-2$, οπότε η (ε_1) τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, -2).

β) Η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη στην (ε_1), οπότε έχει κλίση $\alpha_2=\alpha_1=-\frac{1}{2}$. Επομένως η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον x΄x άξονα ισούται με $-\frac{1}{2}$.

γ) Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=-\frac{1}{2}x+\beta$ και διέρχεται από το σημείο Α(- 4, 1), οπότε $1=-\frac{1}{2}\cdot(-4)+\beta \Leftrightarrow 1=2+\beta \Leftrightarrow \beta=-1$. Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=-\frac{1}{2}x-1$.

Για x = 0 είναι $y=-\frac{1}{2}\cdot 0-1=-1$ και για y = 0 είναι $0=-\frac{1}{2}x-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=-1 \Leftrightarrow x=-2$, οπότε η (ε_2) τέμνει τους άξονες στα σημεία (-2, 0) και (0, - 1).

12730. Δίνεται η ευθεία $y=\alpha x+\beta$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο Α(0, 3). **(Μονάδες 13)**

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y=\lambda x+\kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y=x+3$ και τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη 2. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Αφού η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45° ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας α θα ισούται με $\alpha=\varepsilon\varphi 45^\circ$. Άρα α=1, οπότε η ευθεία παίρνει τη μορφή $y=x+\beta$.

Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(0,3) θα ισχύει $3=0+\beta \Leftrightarrow \beta=3$.

Άρα η ευθεία είναι η $y=x+3$.

β) Αφού οι ευθείες $y = x + 3$ και $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, άρα λ=1. Οπότε η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = x + \kappa$.

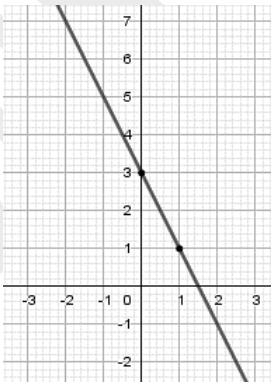
Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο Β(2,0) θα ισχύει $0 = 2 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = -2$.
Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = x - 2$.

12630. Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1,1).

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β. **(Μονάδες 8)**
β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα y΄ y. **(Μονάδες 8)**
γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Η ευθεία έχει κλίση $\alpha = -2$, οπότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $y = -2x + \beta$.
Η ευθεία διέρχεται από τη σημείο (1,1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.
Δηλαδή: $1 = -2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow 3 = \beta$, άρα η ευθεία έχει εξίσωση $y = -2x + 3$.



β) Η ευθεία τέμνει τον άξονα y΄ y στο σημείο (0, 3), αφού για x = 0 βρίσκουμε: $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$

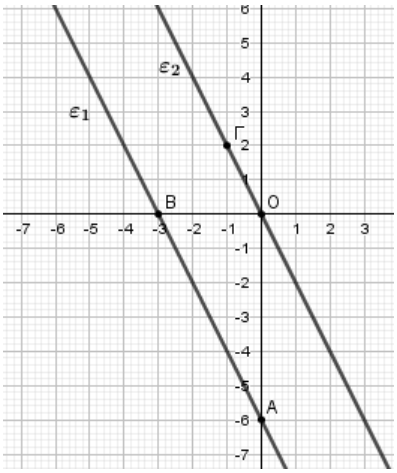
γ) Παίρνουμε στο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία (1, 1) και (0, 3) και χαράζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

12939. Έστω η ευθεία $\varepsilon_1 : y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο Α (0,- 6) και τον άξονα x΄x στο σημείο Β(-3, 0).

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β. **(Μονάδες 13)**
β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **(Μονάδες 6)**
γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Επειδή η ε_2 διέρχεται από το σημείο Α ισχύει ότι: $-6 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -6$
Επειδή η ε_2 διέρχεται από το σημείο Β ισχύει ότι:
$0 = \alpha \cdot (-3) - 6 \Leftrightarrow -3\alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow -3\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = -2$.
Άρα $\varepsilon_2 : y = -2x - 6$



β) Αφού η ευθεία ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής y=αx.
Επειδή οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε η ευθεία ε_2 έχει τύπο $y = -2x$.

γ) Η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία Α (0,- 6) και Β(-3,0). Η ευθεία ε_2 διέρχεται από το σημείο Ο (0, 0) και Γ(-1,2). Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

13033.Δίνεται η ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{2}x+4$.

α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε). **(Μονάδες 4)**

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον x΄x άξονα; **(Μονάδες 4)**

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία Α(6, 1), Β(-2, 3) και Γ(8, 0) είναι σημεία της ευθείας (ε). **(Μονάδες 9)**

γ) Να βρείτε την τιμή του $k\in\mathbb{R}$ ώστε το σημείο (k,5) να είναι σημείο της ευθείας (ε). **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) i. Η κλίση της ευθείας είναι $\alpha=-\frac{1}{2}$.

ii. Επειδή $\alpha<0$ ισχύει εφω <0, οπότε η γωνία ω είναι αμβλεία.

β) Θα εξετάσουμε αν οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για το σημείο Α: $1=-\frac{1}{2}\cdot 6+4\Leftrightarrow 1=-3+4$ ισχύει, άρα το Α είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο Β: $3=-\frac{1}{2}\cdot(-2)+4\Leftrightarrow 3=1+4$ δεν ισχύει, άρα το Β δεν είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο Γ: $0=-\frac{1}{2}\cdot 8+4\Leftrightarrow 0=-4+4$ ισχύει, άρα το Γ είναι σημείο της ευθείας.

γ) Το σημείο (k,5) είναι σημείο της ευθείας, αν και μόνο αν $5=-\frac{1}{2}k+4\Leftrightarrow 10=-k+8\Leftrightarrow k=8-10=-2$

13178.Δίνεται το σημείο Μ(3,4) .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και από το Ο(0,0). **(Μονάδες 9)**

β) Δίνεται το σημείο Ν (- 3, λ) με $\lambda\in\mathbb{R}$ το οποίο ανήκει στην ευθεία ΟΜ.

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 8)**

ii. Αν Ν (- 3,- 4) να εξετάσετε αν τα σημεία Μ Ν, είναι συμμετρικά ως προς το Ο. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και δεν είναι ο άξονας y΄y είναι της μορφής $y=\alpha x$. Για να διέρχεται από το Μ πρέπει $4=3\alpha\Leftrightarrow\alpha=\frac{4}{3}$, οπότε είναι η $y=\frac{4}{3}x$.

β) i. Επειδή το Ν ανήκει στην ευθεία οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή $\lambda=\frac{4}{3}(-3)\Leftrightarrow\lambda=-4$.

ii. Επειδή τα σημεία Μ και Ν έχουν αντίθετες συντεταγμένες, είναι συμμετρικά ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

13054.Δίνονται οι ευθείες ε_1 : $y=(3\alpha+4)x-4$ και ε_2: $y=(3-4\alpha)x+4$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Αν α=1, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών. **(Μονάδες 6)**

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα xx′ . **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) i. Για α=1 είναι ε_1 : $y=(3\cdot 1+4)x-4=7x-4$ και ε_2: $y=(3-4\cdot 1)x+4=-x+4$.

ii. Η ευθεία ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = 7 > 0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα xx′ οξεία γωνία, ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = -1 < 0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα xx′ αμβλεία γωνία.

β) Οι ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή μόνο όταν ισχύει

$$3\alpha + 4 = 3 - 4\alpha \Leftrightarrow 3\alpha + 4\alpha = 3 - 4 \Leftrightarrow 7\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{7}$$

Άρα η ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν $\alpha = -\frac{1}{7}$.

13318.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2},\ x \in \mathbb{R}$.

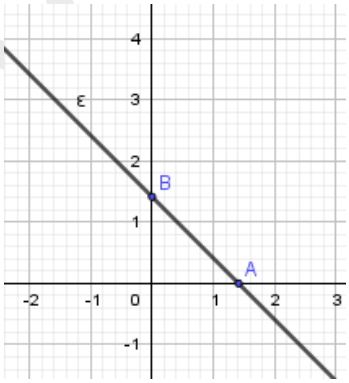
α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f\left(\sqrt{2}\right), f\left(-\sqrt{2}\right), \left[f\left(-\sqrt{2}\right)\right]^2$. **(Μονάδες 12)**

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες x′x και y′y και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $f(0) = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2},\ f\left(\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0,\ f\left(-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2},$

$$\left[f\left(-\sqrt{2}\right)\right]^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4 \cdot 2 = 8$$



β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow -x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A\left(\sqrt{2}, 0\right)$.

Επειδή $f(0) = \sqrt{2}$ η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $B\left(0, \sqrt{2}\right)$.

Η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία που για να την κατασκευάσουμε θα ενώσουμε τα σημεία Α και Β.

13400.Δίνεται η ευθεία ε: y = −x + 2.

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x. **(Μονάδες 9)**

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες. **(Μονάδες 9)**

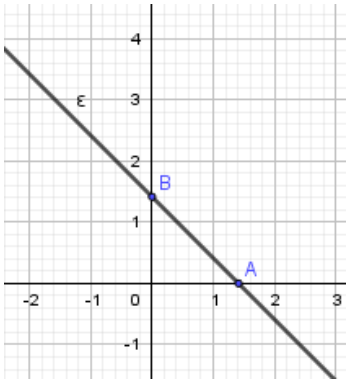
γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = -1 < 0$. Άρα σχηματίζει με τον άξονα x′x αμβλεία γωνία.

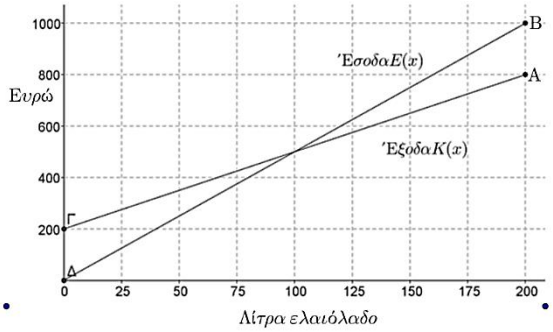
β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα x′x θέτουμε στην εξίσωσή της όπου y = 0. Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι Α(2,0).
Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y′y, θέτουμε στην εξίσωσή της όπου x = 0 και βρίσκουμε y = 2. Άρα το σημείο τομής είναι Β(0,2).

γ) Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία Α και Β που βρήκαμε στο ερώτημα β), τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία όπως στο διπλανό σχήμα.



4ο θέμα

1386. Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο.
Στο διπλανό παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα Κ(x) και τα έσοδα Ε(x) από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του. (Μονάδες 6)
β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας; (Μονάδες 5)
γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά; (Μονάδες 6)
δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων Κ(x) και Ε(x) και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 8)

Λύση

α) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής είναι (100,500), δηλαδή όταν πουλήσει 100 λίτρα λάδι δεν θα έχει ούτε κέρδος ούτε ζημία.

β) Τα αρχικά έξοδα της εταιρείας είναι : Κ(0) =200 ευρώ

γ)Για μην έχει ζημιά πρέπει Έσοδα περισσότερα από τα έξοδα, δηλαδή:
$E(x) > K(x) \Leftrightarrow x > 100$ λίτρα

δ) Η ευθεία που περιγράφει τα έσοδα είναι της μορφής $y = \alpha x$ αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων .Το σημείο $B(200,1000)$ ανήκει στην ευθεία αυτή. Άρα οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν : $1000 = \alpha \cdot 200 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1000}{200} \Leftrightarrow \alpha = 5$ (1)

Επομένως ο τύπος της Ε(x) είναι : $E(x) = 5x$.

Η ευθεία που περιγράφει τις ετήσιες δαπάνες είναι της μορφής $y = \beta x + \gamma$.

Τα σημεία $\Gamma(0,200), A(200,800)$ ανήκουν στην ευθεία αυτή. Άρα οι συντεταγμένες τους την επαληθεύουν : $200 = \beta \cdot 0 + \gamma \Leftrightarrow \gamma = 200$ (2)

$800 = \beta \cdot 200 + \gamma \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 200\beta + 200 = 800 \Leftrightarrow 200\beta = 600 \Leftrightarrow \beta = \frac{600}{200} \Leftrightarrow \beta = 3$

Επομένως ο τύπος της Κ(x) είναι : Κ(x)=3x+200

$E(x) > K(x) \Leftrightarrow 5x > 3x + 200 \Leftrightarrow 2x > 200 \Leftrightarrow x > 100$ λίτρα

Άρα οι εκτιμήσεις στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

1398.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = 4x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 6)
β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3, 0) και (−3, 0). (Μονάδες 4)
γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες. (Μονάδες 8)
δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το Α(0, 3) και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση : $f(x)=0 \Leftrightarrow 4x+2=0 \Leftrightarrow 4x=-2 \Leftrightarrow \frac{4x}{4}=-\frac{2}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄xείναι το σημείο $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

β) Τα σημεία (3,0) και (-3,0) ανήκουν στον άξονα x΄x .Από το α) ερώτημα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x μόνο στο σημείο Β.
Άρα δεν τέμνει τους άξονες (τον x΄x) σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y΄y στο σημείο Γ(0,2)
Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον y΄y στο σημείο Δ(0,-9)
$g(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2-9=0 \Leftrightarrow 4x^2=9 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{4}=\frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{3}{2}$
Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι τα σημεία $E\left(\frac{3}{2},0\right), Z\left(-\frac{3}{2},0\right)$.
Επομένως τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f και g δεν βρίσκονται πάνω στους άξονες.

δ) Έστω h(x)=αx+β.
Επειδή η γραφική παράσταση της h διέρχεται από το σημείο Α έχουμε : $3=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=3$
Επειδή η γραφική παράσταση της h τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox , δηλαδή στο σημείο $E\left(\frac{3}{2},0\right)$, ισχύει ότι:
$0=\alpha\cdot\frac{3}{2}+\beta \Leftrightarrow 0=\alpha\cdot\frac{3}{2}+3 \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} 3\alpha+6=0 \Leftrightarrow 3\alpha=-6 \Leftrightarrow \alpha=-2$. Επομένως $h(x)=-2x+3$.

1403. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **(Μονάδες 10)**
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. **(Μονάδες 7)**
γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y ΄y αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Πρέπει : $9-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3$, άρα $A_f=(-3,3)$

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση : $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι το σημείο $A(-2,0)$.
Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι τα σημεία (0,f(0)).
Είναι $f(0)=\frac{0+2}{\sqrt{9-0^2}}=\frac{2}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$, άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $B\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

γ) Έστω (ε) : $y=\alpha x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία.

Τότε επειδή το σημείο Α ανήκει στην ευθεία, έχουμε: $0=-2\alpha+\beta$ (1) και επειδή το σημείο Β ανήκει στην (ε):: $\frac{2}{3}=\alpha\cdot 0+\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{2}{3}$ (2).

$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}-2\alpha+\frac{2}{3}=0\overset{(\cdot 3)}{\Leftrightarrow}-4\alpha+2=0\Leftrightarrow-4\alpha=-2\Leftrightarrow\alpha=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$. Άρα (ε) : $y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$

1410.Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. **(Μονάδες 5)**

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$. **(Μονάδες 7)**

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i),στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος. **(Μονάδες 4)**

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. **(Μονάδες 9)**

Λύση

Με τα δεδομένα του προβλήματος η συνάρτηση που δείχνει τις θερμίδες που καίγονται με την πάροδο του χρόνου όταν κολυμπάει ύπτιο έχει τύπο $\alpha(x)=9x$,

(x ο χρόνος σε λεπτά)και η συνάρτηση που δείχνει τις θερμίδες που καίγονται με την πάροδο του χρόνου όταν κολυμπάει πεταλούδα έχει τύπο $\beta(x)=12x$

(x ο χρόνος σε λεπτά).

α) Όταν κολυμπάει ύπτιο 32 λεπτά καίει $\alpha(32)=9\cdot 32=288$ θερμίδες

Πρέπει να κάψει ακόμη 360- 288=72 θερμίδες κολυμπώντας πεταλούδα.

Θα κολυμπήσει δηλαδή 6 λεπτά ($\beta(x)=72\Leftrightarrow 12x=72\Leftrightarrow x=6$ λεπτά)

β) i) Όταν κολυμπάει ύπτιο x λεπτά καίει $\alpha(x)=9x$ θερμίδες

Όταν κολυμπάει πεταλούδα $f(x)=y$ λεπτά καίει $\beta(y)=12y$ θερμίδες

$$\alpha(x)+\beta(y)=360\Leftrightarrow 9x+12y=360\overset{(:3)}{\Leftrightarrow}3x+4y=120\Leftrightarrow$$

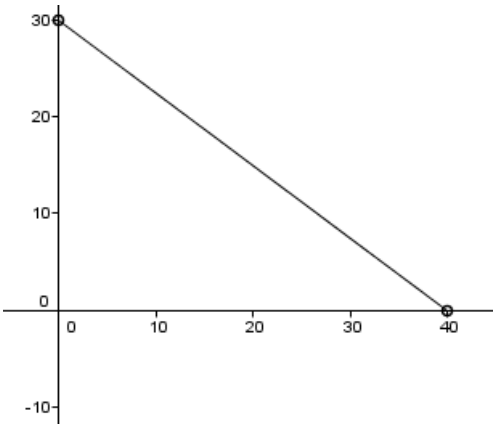
$$4y=120-3x\Leftrightarrow y=\frac{120-3x}{4}\Leftrightarrow y=\frac{120}{4}-\frac{3x}{4}\Leftrightarrow f(x)=30-\frac{3}{4}x$$

ii) Είναι $x\geq 0$ και

$$y\geq 0\Leftrightarrow 30-\frac{3}{4}x\geq 0\Leftrightarrow 30\geq\frac{3}{4}x\Leftrightarrow 120\geq 3x\Leftrightarrow x\leq 40,$$

άρα $0\leq x\leq 40$ λεπτά

γ) Τα σημεία τομής με τους άξονες x΄x , y΄yείναι τα σημεία Β(40,0) και Α(0,30) αντίστοιχα. Στο σημείο Β κολυμπάει μόνο ύπτιο για να κάψει 360 θερμίδες. Στο σημείο Α κολυμπάει μόνο πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.



1444. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με
$f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(0,2). (Μονάδες 3)

β) Για $\lambda=-1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 4)

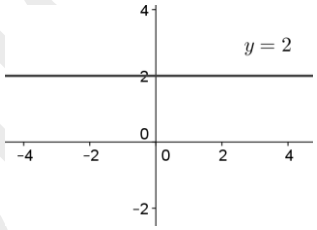
γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β(2, 0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda=1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $f(0)=(\lambda+1)\cdot 0^2-(\lambda+1)\cdot 0+2=2$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(0,2) για οποιαδήποτε τιμή του λ

β) Για $\lambda=-1$ είναι $f(x)=2$ και η γραφική της παράσταση είναι η οριζόντια ευθεία $y=2$.



γ) Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β(2, 0) ισχύει ότι:

$f(2)=0 \Leftrightarrow f(2)=(\lambda+1)\cdot 2^2-(\lambda+1)\cdot 2+2=0 \Leftrightarrow$

$4(\lambda+1)-2\lambda-2+2=0 \Leftrightarrow 4\lambda+4-2\lambda=0 \Leftrightarrow 2\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=-2$

Για $\lambda=-2$ είναι $f(x)=-x^2+x+2$

Για να βρούμε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x και σε άλλο σημείο θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Είναι $\Delta=1^2-4\cdot(-1)\cdot 2=9=3^2$

Οι ρίζες είναι : $x_1=\dfrac{-1+3}{2\cdot(-1)}=\dfrac{2}{-2}=-1$ και $x_2=\dfrac{-1-3}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-4}{-2}=2$

Άρα τέμνει τον άξονα x΄x και στο σημείο Γ(-1,0).

δ) Για $\lambda=1$ είναι $f(x)=2x^2-x+2$, $\Delta=(-2)^2-4\cdot 2\cdot 2=4-16=-12<0$

Άρα $f(x)>0$ και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x.

1446. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα x΄x. (Μονάδες 5)

β)Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$. (Μονάδες 10)

γ)Έστω Μ(x , y) σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3<0$, άρα $x^2+x+1>0$ και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x. Άρα δεν τέμνει τον x΄x.

β) Για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$ λύνουμε την ανίσωση : $f(x)<2x+3 \Leftrightarrow x^2+x+1<2x+3 \Leftrightarrow x^2-x-2<0$

Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-x-2 είναι οι αριθμοί -1 και 2.
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
x^2-x-2	+	0 -	0	+

Η λύση της ανίσωσης είναι : $x \in (-1,2)$

γ) $|2x-1|<3 \Leftrightarrow -3<2x-1<3 \Leftrightarrow -2<2x<4 \overset{(:2)}{\Leftrightarrow} -1<x<2$.

Όπως δείξαμε στο β) ερώτημα το σημείο Μ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$

1447. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x)=\begin{cases} -x+2, & \text{αν } x<0 \\ x+2, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y' y . (Μονάδες 3)

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. (Μονάδες 5)

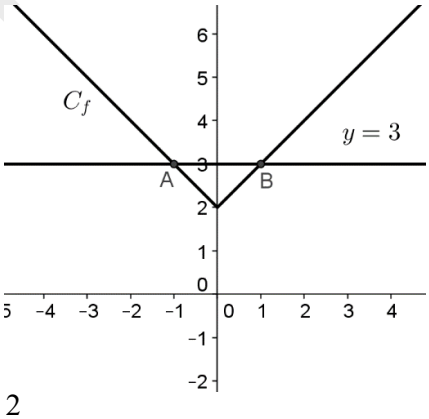
ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι τα σημεία (0,f(0)). Είναι $f(0)=0+2=2$, άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $B(0,2)$.



β) i)Τα σημεία τομής είναι τα σημεία Α(-1,3) και Β(1,3).

ii) Έχουν ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες .Άρα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.

γ) i) Για $\alpha>2$

ii) Για $x<0$: έχουμε $f(x)=\alpha \Leftrightarrow -x+2=\alpha \Leftrightarrow x=2-\alpha$ δεκτή αν $\alpha>2$

Για $x\geq 0$: έχουμε $f(x)=\alpha \Leftrightarrow x-2=\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+2$ δεκτή αν $\alpha\geq -2$

Επομένως για $\alpha>2$ έχουμε δύο σημεία τομής τα Γ(2-α,α) και Δ(α+2,α)

1449. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ **και** $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-2x=3x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$

Είναι $f(1)=g(1)=-1,\ f(4)=g(4)=8$, άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα Α(1,-1) και Β(4,4).

β) Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g λύνουμε την ανίσωση: $f(x)<g(x) \Leftrightarrow x^2-2x<3x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4<0$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	-∞	1	4	+∞
x^2-5x+4	+	0 −	0	+

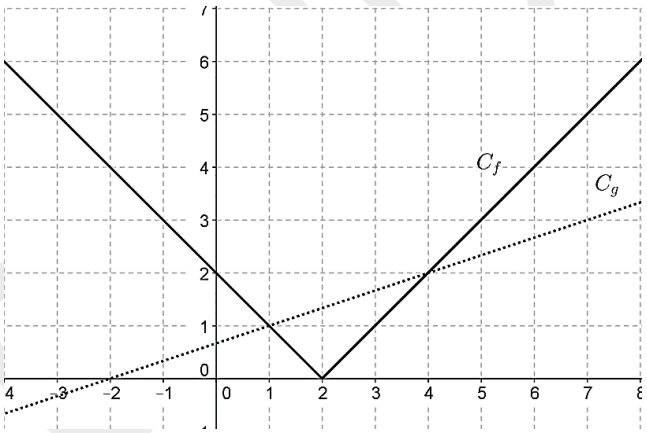
Η λύση της ανίσωσης είναι : $x \in (1,4)$

γ) Πρέπει $f(x)>\alpha \Leftrightarrow x^2-2x>\alpha \Leftrightarrow x^2-2x-\alpha>0$ ισχύει αφού

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-\alpha)=4+4\alpha=4(1+\alpha)<0 \ \ (\alpha<-1)$

1468. Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x)=|x-2| \text{ και } g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}, x\in\mathbb{R}$$



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g.

(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g. (Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$ (Μονάδες 5)

Λύση

α) Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι Α(1,1) και Β(4,2).

β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x) \Leftrightarrow |x-2|=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \overset{(\cdot 3)}{\Leftrightarrow} |3x-6|=x+2$

Αν $x\le -2$: αδύνατη

Αν $x>-2$: $3x-6=x+2 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$ ή $3x-6=-x-2 \Leftrightarrow 4x=4 \Leftrightarrow x=1$

Είναι $f(1)=g(1)=1,\ f(4)=g(4)=2$, άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα Α(1,1) και Β(4,2).

γ) Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

δ) Πρέπει : $3|2-x|-(x+2)\ge 0 \overset{|2-x|=|x-2|}{\Leftrightarrow} |x-2|\ge\frac{1}{3}(x+2) \Leftrightarrow$

$f(x)\ge g(x) \overset{(\text{ερώτημα})}{\Leftrightarrow} x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

1479. **Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y = 60 + 0,20x$,όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.**

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ; **(Μονάδες 5)**

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; **(Μονάδες 5)**

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0,10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. **(Μονάδες 10)**

δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,10 \cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ). **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Για $x = 400$: $y = 60 + 0,20 \cdot 400 = 60 + 80 = 140$ ευρώ

β) Για $y = 150$: $150 = 60 + 0,20 \cdot x \Leftrightarrow 0,2 \cdot x = 90 \Leftrightarrow x = \dfrac{90}{0,2} \Leftrightarrow x = 450\,\text{km}$

γ) Έστω $f(x) = 60 + 0,20 \cdot x$ η συνάρτηση που μας δείχνει πόσο χρεώνει η Α εταιρεία και $g(x) = 80 + 0,10x$ η συνάρτηση που μας δείχνει πόσο χρεώνει η Β εταιρεία.

$f(x) - g(x) = 60 + 0,20 \cdot x - 80 - 0,10 \cdot x = 0,1 \cdot x - 20 = 0,1(x - 200)$

Για $x < 200 \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Για λιγότερο από 200km συμφέρει να επιλέξουμε την Α εταιρεία
Για ακριβώς 200 km οποιαδήποτε από τις δύο.
Για περισσότερο από 200km συμφέρει να επιλέξουμε την Β εταιρεία.

δ) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0,20 \cdot x = 80 + 0,10 \cdot x \Leftrightarrow 0,1 \cdot x = 20 \Leftrightarrow x = 200\text{km}$

$f(200) = 60 + 0,2 \cdot 200 = 60 + 40 = 100 = g(200)$

Το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι το Α(200,100).
Για την τετμημένη 200 έχουμε την ίδια χρέωση και στις δύο εταιρείες.

1496. **Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα 'RED' χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.**
Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα 'YELLOW' χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.
Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν f(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'RED' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
f (x) (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

ii) Αν g(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία 'YELLOW' για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
g (x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g και τους τύπους τους f(x) , g(x) . (Μονάδες 8)
γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας 'RED' είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία 'RED' και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β. (Μονάδες 3)

Λύση

α) i) Για $x=0$ πληρώνουμε μόνο την είσοδο στο ΤΑΧΙ, 1 ευρώ.
Για $x=2$ πληρώνουμε 1 ευρώ για την είσοδο και $0,6\cdot 2=1,2$ ευρώ για τη διαδρομή, άρα συνολικά $1+1,2=2,2$ ευρώ
Όμοια για $x=8$ πληρώνουμε $1+0,6\cdot 8=1+4,8=5,8$ ευρώ

	0	2	8
f (x) (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii) Για να πληρώσουμε 2 ευρώ που είναι η είσοδος στο ΤΑΧΙ, δεν έχουμε κάνει καθόλου χιλιόμετρα, άρα $x=0$.
Για να πληρώσουμε $g(x)=3,2$ ευρώ, αν αφαιρέσουμε τα 2 ευρώ της εισόδου, για τη διαδρομή πληρώνουμε 1,2 ευρώ.

x (km)	0	3	7
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

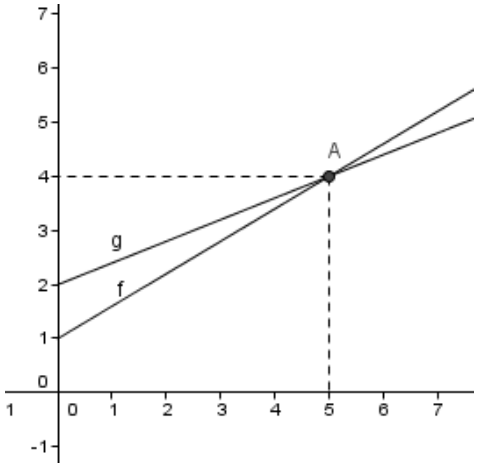
$$\text{Άρα } 0,4\cdot x=1,2 \Leftrightarrow x=\frac{1,2}{0,4} \Leftrightarrow x=3 \text{ χιλιόμετρα.}$$

Όμοια αφαιρούμε 2 ευρώ της εισόδου και μένουν 2,8 ευρώ για τη διαδρομή.

$$\text{Άρα } 0,4\cdot x=2,8 \Leftrightarrow x=\frac{2,8}{0,4} \Leftrightarrow x=7$$

β) Για τη διαδρομή x χιλιομέτρων στην 'RED' πληρώνουμε $0,6x$ για τη διαδρομή και 1 ευρώ με την είσοδο, άρα $f(x)=0,6x+1$, x σε km. Για τη διαδρομή x χιλιομέτρων στην 'YELLOW' πληρώνουμε $0,4x$ για τη διαδρομή και 2 ευρώ με την είσοδο, άρα $g(x)=2+0,4\cdot x$,x σε km Είναι $A_f=A_g=[0,+\infty)$

γ) Για την C_f σχεδιάζουμε την ημιευθεία που έχει αρχή το $(0,1)$ και διέρχεται από το $(2,2,2)$.
Για την C_g σχεδιάζουμε την ημιευθεία που έχει αρχή το $(0,2)$ και διέρχεται από το $(3,3,2)$.
Όπως φαίνεται από το σχήμα η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g στο διάστημα $(0,5)$,οπότε για διαδρομή μικρότερης των 5 χιλιομέτρων η εταιρεία 'RED' είναι πιο οικονομική.



δ) Έστω x_A τα χιλιόμετρα που διάνυσε ο πελάτης Α και x_B τα χιλιόμετρα που διάνυσε ο πελάτης Β. Τότε $x_A-x_B=3$ (1)

$$g(x_A)-g(x_B)=0,4x_A \cancel{+2}-0,4x_B \cancel{+2}=0,4(x_A-x_B)=0,4\cdot 3 \Leftrightarrow g(x_A)-g(x_B)=1,2$$

Άρα ο πελάτης Α θα πληρώσει παραπάνω 1,2 ευρώ.

1523.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . **(Μονάδες 5)**

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases}x-3, & x>2\\ -x+3, & x<2\end{cases}$. **(Μονάδες 7)**

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y . **(Μονάδες 8)**

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$. **(Μονάδες 5)**

Λύση

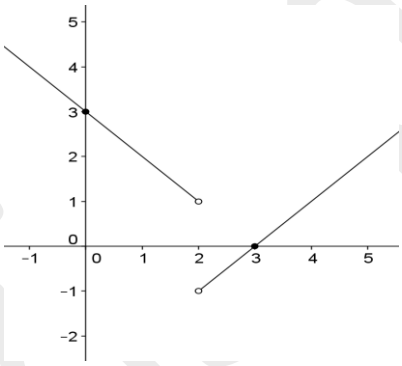
α) Πρέπει $|2-x|\neq 0 \Leftrightarrow 2-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$, άρα : $A_f=\mathbb{R}-\{2\}$

β) Για $x>2 \Leftrightarrow 2-x<0 \Rightarrow |2-x|=x-2$ και $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{x-2}}=x-3$

Για $x<2 \Leftrightarrow 2-x>0 \Rightarrow |2-x|=-x+2=-(x-2)$ και

$f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{-(x-2)}=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{-(\cancel{x-2})}=-(x-3)=-x+3$. Επομένως $f(x)=\begin{cases}x-3, x>2\\ -x+3, x<2\end{cases}$.

γ)



Τα σημεία τομής γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y είναι τα A(3,0) και B(0,3) αντίστοιχα.

δ) $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(2,3]$.

12944.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ **και** $g(x)=x-\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=f(2)+g(2)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)-g\left(\dfrac{1}{2}\right)$. **(Μονάδες 7)**

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2-(g(x))^2=4$ **για οποιοδήποτε αριθμό** $x\neq 0$. **(Μονάδες 8)**

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. **Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι** $|\alpha|\ge 2$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $A=f(2)+g(2)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)-g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2+\cancel{\dfrac{1}{2}}+2-\cancel{\dfrac{1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\right)-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\right)=4-\left(\dfrac{1}{2}+2\right)-\left(\dfrac{1}{2}-2\right)=$

$$4-\frac{1}{2}-\cancel{2}-\frac{1}{2}+\cancel{2}=3$$

β) Για κάθε $x\neq 0$ είναι

$$\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\left(x^2-2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}-x^2+2-\frac{1}{x^2}=4$$

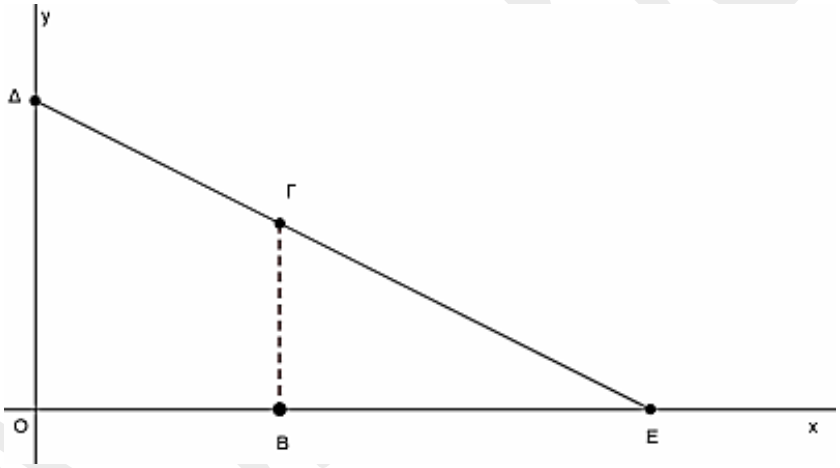
γ) Το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f καθορίζεται από το πλήθος λύσεων της εξίσωσης f(x) = α , οπότε αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f , η εξίσωση f(x) =α έχει πραγματικές λύσεις. Είναι:

$$f(x)=\alpha\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\alpha\Leftrightarrow x^2+1=\alpha x\Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0\,.$$

Η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2-4$.

Επειδή η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση, είναι $\Delta\geq 0\Leftrightarrow\alpha^2-4\geq 0\Leftrightarrow\alpha^2\geq 4\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2}\geq\sqrt{4}\Leftrightarrow|\alpha|\geq 2$.

12728. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον y y' άξονα, Ε ένα σημείο του x΄x άξονα και Ο είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας ΔΕ είναι: $y+\frac{1}{2}x=4$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Δ . (Μονάδες 6)

Ένα σημείο Γ(t, $y_Γ$) κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και Β ένα σημείο του x'x άξονα, τέτοιο ώστε ΒΓ να είναι παράλληλη στον y΄y άξονα.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_Γ=4-\frac{1}{2}t$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t)=4t-\frac{1}{2}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 7)

δ) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με 9, 75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ . (Μονάδες 6)

Λύση

α) Η ευθεία $y+\frac{1}{2}x=4$ τέμνει τον y΄y άξονα στο σημείο Δ(0, 4) και τον x΄x άξονα στο σημείο Ε(8, 0),

αφού για x = 0, έχουμε: $y+\frac{1}{2}\cdot 0=4\Leftrightarrow y=4$ και για y = 0, έχουμε: $0+\frac{1}{2}x=4\Leftrightarrow x=8$

β) Το Γ είναι σημείο του ΔΕ ευθύγραμμου τμήματος, άρα έχει τετμημένη που παίρνει τιμές μεταξύ των τιμών που έχουν οι τετμημένες των σημείων Δ(0, 4) και Ε(8, 0). Δηλαδή: $0\le t\le 8$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ ικανοποιούν την εξίσωση $y+\frac{1}{2}x=4$, οπότε:

$y_\Gamma+\frac{1}{2}t=4\Leftrightarrow y_\Gamma=4-\frac{1}{2}t$.

γ) Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι: $E=\frac{(O\Delta+B\Gamma)OB}{2}$, όπου $O\Delta=y_\Delta=4$, $B\Gamma=4-\frac{1}{2}t$ και $OB=x_\Gamma=t$,

οπότε $E(t)=\frac{\left(4+4-\frac{1}{2}t\right)t}{2}=\frac{1}{2}\left(8t-\frac{1}{2}t^2\right)=\frac{1}{2}8t-\frac{1}{4}t^2=4t-\frac{1}{4}t^2$ με $0\le t\le 8$.

δ) $E(t)=9,75\Leftrightarrow 4t-\frac{1}{4}t^2=9,75\Leftrightarrow 16t-t^2=39\Leftrightarrow 0=t^2-16t+39\Leftrightarrow t=3$ ή $t=13$.

Επειδή όμως $0\le t\le 8$, είναι t = 3, οπότε $x_\Gamma=3$ και $y_\Gamma=4-\frac{1}{2}\cdot 3=4-1,5=2,5$. Άρα $\Gamma(3\,,\,2,5)$.

12788. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})=8$. **Μονάδες 7)**

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία y = 4 . **(Μονάδες 9)**

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με ώστε να ισχύει f(α) = f(β) . Να αποδείξετε ότι α + β = 2. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $f(\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})=(\sqrt{3}-1)^2+(-\sqrt{3}-1)^2=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\cdot 1+1+(-\sqrt{3})^2+2(-\sqrt{3})(-1)+(-1)^2=$

$3-\cancel{2\sqrt{3}}+1+3+\cancel{2\sqrt{3}}+1=8$

β) Ένα σημείο M(x, f(x)) της γραφικής παράστασης της f , βρίσκεται κάτω από την ευθεία y = 4 μόνο όταν ισχύει $f(x)<4\Leftrightarrow(x-1)^2<4\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{4}\Leftrightarrow|x-1|<2\Leftrightarrow -2<x-1<2\Leftrightarrow -1<x<3$.

Οι ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα $(-1,3)$ είναι οι: 0, 1, 2.

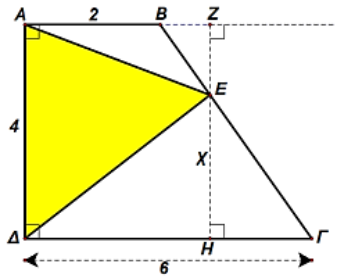
Είναι $f(0)=(0-1)^2=1$, $f(1)=(1-1)^2=0$, $f(2)=(2-1)^2=1$, οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα (0,1), (1,0) και (2,1).

γ) $f(\alpha)=f(\beta)\Leftrightarrow(\alpha-1)^2=(\beta-1)^2\Leftrightarrow|\alpha-1|=|\beta-1|\Leftrightarrow\alpha-1=\pm(\beta-1)\Leftrightarrow$

$(\alpha-1=\beta-1\Leftrightarrow\alpha=\beta$ άτοπο αφού $\alpha\neq\beta)$ ή $(\alpha-1=-\beta+1\Leftrightarrow\alpha+\beta=2)$

Askisopolis

12834. **Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε ΑΒ=2, ΑΔ=4, ΓΔ=6, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.**



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=-2x+12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης; **(Μονάδες 10)**

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. **(Μονάδες 7)**

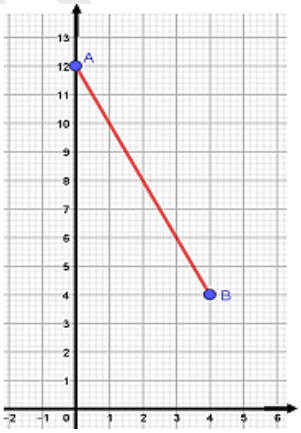
γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma=f\left(\frac{1}{16}\right)+f\left(\frac{2}{16}\right)+f\left(\frac{3}{16}\right)+f\left(\frac{4}{16}\right)+...+f\left(\frac{64}{16}\right)$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Είναι $f(x)=(ABΓΔ)-(ABE)-(EΔΓ)=\frac{(2+6)\cdot 4}{2}-\frac{2\cdot(4-x)}{2}-\frac{6x}{2}=16-4+x-3x=12-2x$

Για την μεταβλητή x, πρέπει $x\in[0,4]$, αφού απαιτούμε τα μήκη ΕΗ και ΕΖ να είναι μη αρνητικοί αριθμοί, άρα πρέπει $x\geq 0$ και $4-x\geq 0$, άρα $x\leq 4$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=-2x+12$ με $x\in\mathbb{R}$, γνωρίζουμε ότι είναι μια ευθεία, οπότε εδώ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, με άκρα τα σημεία $A(0,12)$ και $B(4,4)$, αφού
$f(0)=-2\cdot 0+12=12$ και $f(4)=-2\cdot 4+12=-8+12=4$.



γ) $\Sigma=f\left(\frac{1}{16}\right)+f\left(\frac{2}{16}\right)+f\left(\frac{3}{16}\right)+f\left(\frac{4}{16}\right)+...+f\left(\frac{64}{16}\right)=$

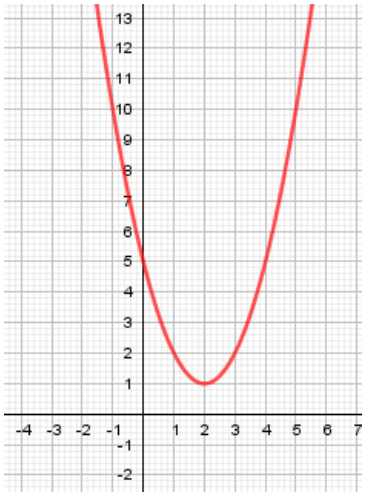
$\left(-2\cdot\frac{1}{16}+12\right)+\left(-2\cdot\frac{2}{16}+12\right)+...+\left(-2\cdot\frac{64}{16}+12\right)=$

$-\frac{2}{16}\cdot 1+12-\frac{2}{16}\cdot 2+12-...-\frac{2}{16}\cdot 64+12=-\frac{2}{16}(1+2+...+64)+12\cdot 64=$

$-\frac{1}{8}\cdot\frac{64(64+1)}{2}+12\cdot 64=-4\cdot 65+768=-260+768=508$

Το άθροισμα $1+2+...+64$ είναι άθροισμα 64 όρων της αριθμητικής προόδου που έχει $\alpha_1=1$ και ω = 1, οπότε $1+2+...+64=\frac{64(64+1)}{2}$.

13091. **Στο διπλανό παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+5$.**



α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 7 και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας. **(Μονάδες 6)**

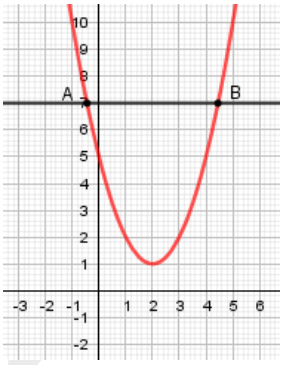
β) i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 6)**

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β)i. **(Μονάδες 7)**

γ) Έστω ότι μια ευθεία y = λ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2, με $x_1<x_2$. Να δείξετε ότι $x_1+x_2=4$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Φέρνουμε την ευθεία y = 7 και διαπιστώνουμε ότι τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία Α και Β.



Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία y = 7 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=7$. Είναι

$f(x)=7 \Leftrightarrow x^2-4x+5=7 \Leftrightarrow x^2-4x-2=0$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=24>0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις, άρα η C_f τέμνει την ευθεία y = 7 σε δύο σημεία.

β) i. Η ευθεία y = λ είναι παράλληλη στον x΄x και τέμνει τον y΄y στο σημείο (0 , λ).

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, εξαρτάται από το αν η τιμή του λ είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με 1, διότι με βάση το σχήμα βλέπουμε ότι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης είναι 1.

- Αν λ < 1 η ευθεία y = λ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,
- Αν λ = 1 η ευθεία y = λ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,
- Αν λ > 1 η ευθεία y = λ έχει δύο κοινά σημεία με τη C_f .

ii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\lambda$.

Είναι $f(x)=\lambda \Leftrightarrow x^2-4x+5-\lambda=0$.

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot(5-\lambda)=16-20+4\lambda=4\lambda-4=4(\lambda-1)$

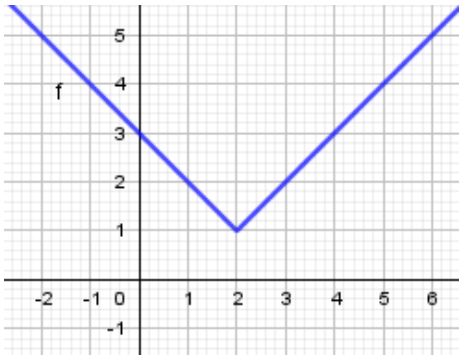
Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας.

- Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 4(\lambda-1)>0\Leftrightarrow \lambda-1>0\Leftrightarrow \lambda>1$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, οπότε η C_f έχει δύο κοινά σημεία με την ευθεία y = λ.
- Αν $\Delta<0\Leftrightarrow \lambda<1$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία y = λ.
- Αν $\Delta=0\Leftrightarrow \lambda=1$ τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα, οπότε η C_f έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την ευθεία y = λ.

γ) Επειδή η ευθεία y = λ τέμνει την C_f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2, με $x_1<x_2$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda>1$ και τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=\lambda \Leftrightarrow x^2-4x+5-\lambda=0$.

Από τους τύπους του Vieta προκύπτει ότι $S=x_1+x_2=-\dfrac{-4}{1}=4$.

12914. **Έστω η ευθεία ε: y = c, με παράμετρο $c\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x)=|x-2|+1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο διπλανό σχήμα.**



α) i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c\in\mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;
(Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i). **(Μονάδες 5)**

β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία Α, Β. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3-c,c)$ και $B(c+1,c)$.
(Μονάδες 8)

γ) i. Αν Α, Β τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του

τμήματος ΑΒ είναι $(AB)\le 2$; (Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i). (Μονάδες 4)

Λύση

α) i. Επειδή η ευθεία ε είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, από το σχήμα προκύπτει ότι έχει κοινά σημεία με την C_f όταν $c\ge 1$.

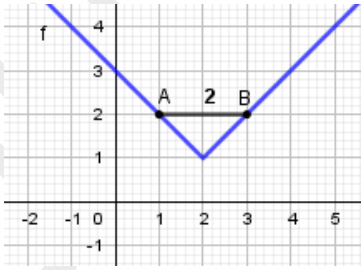
ii. $f(x)=c \Leftrightarrow |x-2|+1=c \Leftrightarrow |x-2|=c-1$

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|x-2|\ge 0$, η εξίσωση έχει λύση μόνο όταν και $c-1\ge 0 \Leftrightarrow c\ge 1$.

β) Για $c\ge 1$ είναι $|x-2|=c-1 \Leftrightarrow (x-2=c-1 \Leftrightarrow x=c+1)$ ή $(x-2=-c+1 \Leftrightarrow x=3-c)$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $A(3-c,c)$ και $B(c+1,c)$

γ) i. Επειδή τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τεταγμένη, για να είναι $(AB)\le 2$ πρέπει το μήκος του οριζόντιου τμήματος ανάμεσα στις δύο ημιευθείες της γραφικής παράστασης της f να είναι μικρότερο ή ίσο του 2. Από το σχήμα προκύπτει ότι αυτό ισχύει για τα σημεία με τεταγμένη από 1 έως και 2. Άρα $1\le c\le 2$.



ii. Επειδή τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τεταγμένη, το μήκος (AB) είναι $(AB)=|c+1-(3-c)|=|c+1-3+c|=|2c-2|$

Είναι $(AB)\le 2 \Leftrightarrow |2c-2|\le 2 \Leftrightarrow -2\le 2c-2\le 2 \Leftrightarrow 0\le 2c\le 4 \Leftrightarrow 0\le c\le 2$.

όμως από το α σκέλος είναι $c\ge 1$, άρα $1\le c\le 2$.

12921. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2|\kappa|x-2$ και η ευθεία ε: $y=2x-\kappa^2$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ. (Μονάδες 8)

γ) Για κ = -3 να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 5)

δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ). (Μονάδες 7)

Λύση

α) Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-2|\kappa|)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=4\kappa^2+8$.

Επειδή για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ είναι $\Delta>0$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

β) Τα σημεία τομής έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=y \Leftrightarrow$

$x^2-2|\kappa|x-2=2x-\kappa^2 \Leftrightarrow x^2-2|\kappa|x-2-2x+\kappa^2=0 \Leftrightarrow x^2-2(|\kappa|+1)x+\kappa^2-2=0$ (1)

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα

$\Delta=4(|\kappa|+1)^2-4(\kappa^2-2)=4(\kappa^2+2|\kappa|+1)-4(\kappa^2-2)=4(\cancel{\kappa^2}+2|\kappa|+1-\cancel{\kappa^2}+2)=4(2|\kappa|+3)$

Επειδή για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ είναι $\Delta>0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ.

γ) Για κ = -3, η (1) γίνεται $x^2-8x+7=0$, έχει διακρίνουσα $\Delta=4(2|-3|+3)=36$ και ρίζες

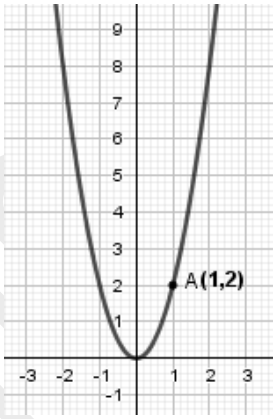
$x_1=\frac{8+\sqrt{36}}{2}=7,\ x_2=\frac{8-\sqrt{36}}{2}=1$

Για x = 1 είναι $y = 2\cdot 1-(-3)^2 = 2-9 = -7$ άρα σημείο τομής το $A(1,-7)$ και

για x = 7 είναι $y = 2\cdot 7-(-3)^2 = 14-9 = 5$ άρα σημείο τομής το $B(7,5)$.

δ) Είναι $(AB) = \sqrt{(7-1)^2+(5-(-7))^2} = \sqrt{36+144} = \sqrt{180} = \sqrt{36\cdot 5} = 6\sqrt{5}$

12942. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με παράμετρο α.



α) Αν το σημείο Α(1, 2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι α = 2. (Μονάδες 6)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο (1,6) και έχει κλίση λ = 2. (Μονάδες 4)

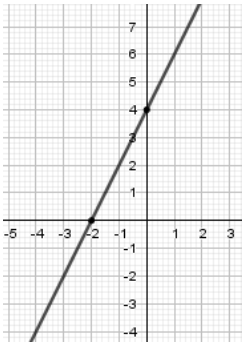
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε. (Μονάδες 4)

γ) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x+4$. (Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος. (Μονάδες 7)

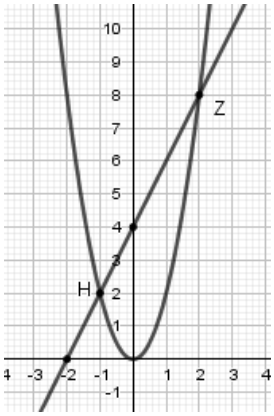
Λύση

α) Επειδή το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της f ισχύει ότι $f(1) = 2 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2$.



β) i. Η εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση 2 είναι της μορφής $y = 2x+\beta$. Επειδή διέρχεται από το σημείο (1, 6) ισχύει ότι $6 = 2\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta = 4$, οπότε η ευθεία είναι η $y = 2x+4$.

ii. Για $y = 0$ είναι $2x+4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$ και για x = 0 είναι $y = 2\cdot 0+4 = 4$, οπότε η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία (-2, 0) και (0,4). Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ) i. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x+4$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x+4$, οπότε με βάση το παραπάνω σχήμα συμπεραίνουμε ότι $x \in (-1,2)$.

ii. $f(x) < 2x+4 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4 < 0 \Leftrightarrow x^2-x-2 < 0$

Το τριώνυμο x^2-x-2 έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2) = 9$ και ρίζες

$x_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ και επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι 1 > 0, το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Άρα $x^2-x-2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1,2)$.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
x^2-x-2	+	0	-	0	+

13055.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5,\ x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2x+\beta,\ \beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x)=f(2-x)$. (Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=f(3,52)-f(0,52)+f(3,48)-f(0,48)$. (Μονάδες 6)

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν β =–5. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β, ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία. (Μονάδες 7)

Λύση

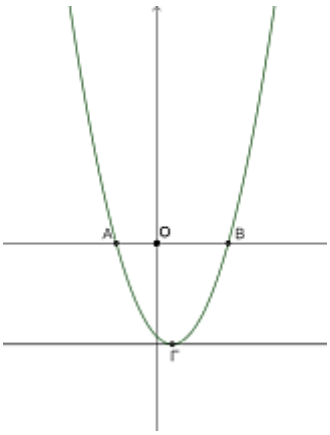
α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(2+x)=(2+x)^2-4(2+x)+5=4+\cancel{4x}+x^2-8-\cancel{4x}+5=x^2+1$ και $f(2-x)=(2-x)^2-4(2-x)+5=4-\cancel{4x}+x^2-8+\cancel{4x}+5=x^2+1$, οπότε $f(2+x)=f(2-x)$.

β) Από τη σχέση $f(2+x)=f(2-x)$ για x = 1,52 έχουμε:
$f(2+1,52)=f(2-1,52)\Leftrightarrow f(3,52)-f(0,48)=0$ (1) και
για x = 1,48 έχουμε: $f(2+1,48)=f(2-1,48)\Leftrightarrow f(3,48)-f(0,52)=0$ (2)
Είναι $A=f(3,52)-f(0,52)+f(3,48)-f(0,48)=\big(f(3,52)-f(0,48)\big)+\big(f(3,48)-f(0,52)\big)\overset{(1),(2)}{=}0+0=0$

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y=2x-5$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης
$f(x)=2x-5\Leftrightarrow x^2-4x+5=2x-5\Leftrightarrow x^2-6x+10=0$ που είναι αδύνατη αφού έχει διακρίνουσα
$\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot10=-4<0$. Άρα η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν β =–5.

δ) Η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία μόνο όταν η εξίσωση
$f(x)=2x+\beta\Leftrightarrow x^2-4x+5-2x-\beta=0\Leftrightarrow x^2-6x+5-\beta=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση.
Επειδή η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, έχει τουλάχιστον μία λύση αν και μόνο αν
$\Delta\ge0\Leftrightarrow(-6)^2-4\cdot1\cdot(5-\beta)\ge0\Leftrightarrow36-20+4\beta\ge0\Leftrightarrow4\beta\ge-16\Leftrightarrow\beta\ge-4$ οπότε η ζητούμενη μικρότερη τιμή του β είναι η τιμή β =– 4.

13314.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-3$. Αν Α(α, 0), Β(β, 0), Γ(γ, δ) σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον x΄x έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:



α) Να δείξετε ότι $\alpha=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2})<0$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή τα σημεία Α, Β ανήκουν στη γραφική παράσταση της f, ισχύει ότι $f(\alpha)=0$ και $f(\beta)=0$.
Άρα τα α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-3=0$

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ= 13 και ρίζες $x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Επειδή α < 0 και β > 0, είναι $\alpha=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

β) $f\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}-3=2-\sqrt{2}-3=-1-\sqrt{2}<0$

γ) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Επειδή $f\left(\sqrt{2}\right)<0$, είναι $\sqrt{2}\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$, άρα $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

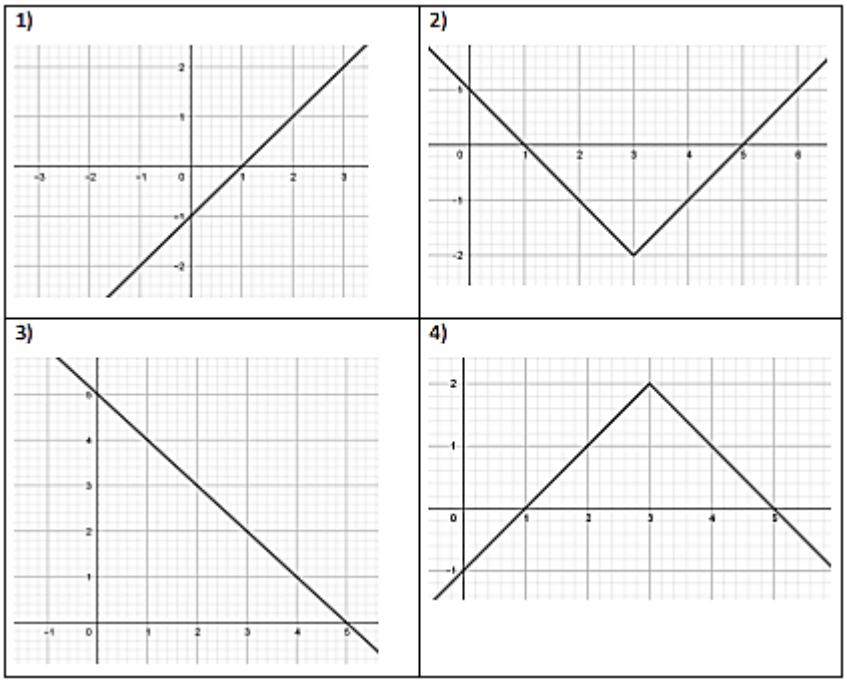
δ) Η παράλληλη από το Γ στον x΄x είναι η y = δ και επειδή έχει με την C_f ένα μόνο κοινό σημείο, η εξίσωση $f(x)=\delta\Leftrightarrow x^2-x-3-\delta=0$ έχει μία μόνο λύση.
Επειδή όμως η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού, έχει μοναδική λύση μόνο όταν
$\Delta=0\Leftrightarrow(-1)^2-4\cdot1\cdot(-3-\delta)=0\Leftrightarrow1+12+4\delta=0\Leftrightarrow4\delta=-13\Leftrightarrow\delta=-\frac{13}{4}$.

Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2-x-3+\frac{13}{4}=0\Leftrightarrow4x^2-4x-12+13=0\Leftrightarrow4x^2-4x+1=0\Leftrightarrow$
$(2x-1)^2=0\Leftrightarrow2x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, άρα $\gamma=\frac{1}{2}$.

12681. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x-3|+4-(|6-2x|+2)$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=2-|x-3|$. **(Μονάδες 5)**

β) Αφού δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}x-1,\ \text{αν } x<3\\5-x,\ \text{αν } x\geq3\end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Η γραφική παράσταση της f είναι:



(Μονάδες 9)

γ) i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία y = −1 και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2-|x-3|>-1$. (Μονάδες 5)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα. (Μονάδες 6)

Λύση

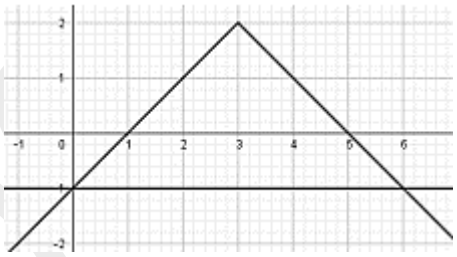
α) $f(x)=|x-3|+4-(|6-2x|+2)=|x-3|+4-|-2(x-3)|-2=2+|x-3|-|-2||x-3|=$
$2+|x-3|-2|x-3|=2-|x-3|$

β) Αν $x<3$ τότε $f(x)=2-(-x+3)=2+x-3=x-1$ και

αν $x\geq 3$ τότε $f(x)=2-(x-3)=2-x+3=5-x$, οπότε $f(x)=\begin{cases}x-1, \text{ αν } x<3\\ 5-x, \text{ αν } x\geq 3\end{cases}$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι η (4).

γ) i. Αν σχεδιάσουμε την ευθεία y = −1 προκύπτει το διπλανό γράφημα.
Η λύση της ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία y = −1. Από το σχήμα προκύπτει ότι $0<x<6$.



ii) Είναι: $f(x)>y \Leftrightarrow 2-|x-3|>-1 \Leftrightarrow -|x-3|>-3 \Leftrightarrow$
$|x-3|<3 \Leftrightarrow -3<x-3<3 \Leftrightarrow 0<x<6$

12682. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-(x-1)^2$ και $g(x)=|x-1|+2$, με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x)=\begin{cases}x+1, x\geq 1\\ -x+3, x<1\end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Η C_f είναι κάτω από τον άξονα x΄x για τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)<0$.

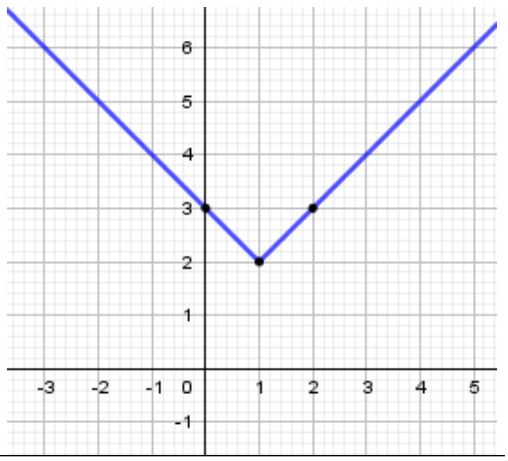
Είναι $f(x)<0 \Leftrightarrow 1-(x-1)^2<0 \Leftrightarrow -(x-1)^2<-1 \Leftrightarrow (x-1)^2>1 \Leftrightarrow |x-1|>1 \Leftrightarrow$
$(x-1<-1 \Leftrightarrow x<0)$ ή $(x-1>1 \Leftrightarrow x>2)$

β) Αν $x\geq 1$ τότε $g(x)=x-1+2=x+1$ και αν $x<1$ τότε
$g(x)=-x+1+2=-x+3$, οπότε

$g(x)=\begin{cases}x+1, x\geq 1\\ -x+3, x<1\end{cases}$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g αποτελείται :
Από το τμήμα της ευθείας y = x + 1 με $x\geq 1$ που έχει πίνακα τιμών:

x	1	2
y	2	3



και από το τμήμα της ευθείας y = - x +3, x< 1που έχει πίνακα τιμών:
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της g.

x	1	0
y	2	3

γ) 1ος τρόπος

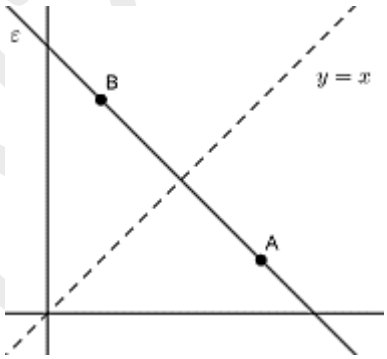
Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) < g(x)$.

Είναι $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 1-(x-1)^2 < |x-1|+2 \Leftrightarrow 0 < (x-1)^2 + |x-1| + 3$ που ισχύει αφού $(x-1)^2 \geq 0$ και $|x-1| \geq 0$.

2ος τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1-(x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1$ και $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1|+2 \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq 2$, οπότε $f(x) < g(x)$.

13298.Τα σημεία Α και Β είναι σημεία του 1ου τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο y = x της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου Α με τις συντεταγμένες το σημείου Β. **(Μονάδες 3)**

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα Α κα Β έχει κλίση α = −1. **(Μονάδες 6)**

γ) Αν επιπλέον τα σημεία Α και Β έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι κ = 3 και να προσδιορίσετε τα σημεία Α και Β. **(Μονάδες 8)**

ii. Για κ = 3, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Αφού τα σημεία *A* και *B* είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο του 1ου και του 3ου τεταρτημόριου θα ισχύει $x_B = y_A$ και $x_A = y_B$.

β) Η κλίση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α ,Β δίνεται από τη σχέση: $\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Λόγω του α σκέλους όμως είναι: $\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{x_A - x_B}{x_B - x_A} = \frac{-(x_B - x_A)}{x_B - x_A} = -1$

γ) i. Επειδή $y_A = x_B$, είναι $\kappa^2 - 3\kappa + 1 = \kappa - 2 \Leftrightarrow \kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ= 4 και ρίζες $\kappa_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3$, $\kappa_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1$

Για $\kappa = 3$ είναι $y_A = 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 3$ και $x_B = 3 - 2 = 1$ δεκτές τιμές

Για $\kappa = 1$ είναι $y_A = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ απορρίπτεται γιατί επειδή τα Α, Β βρίσκονται στο 1ο τεταρτημόριο είναι $y_A > 0$.

Οπότε, τα σημεία Α και Β έχουν συντεταγμένες (4,1) και (1,4) αντίστοιχα.

ii. Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής y = αx + β και κλίση α = −1, άρα y= −x + β.
Επειδή διέρχεται από το σημείο Α(4,1), είναι: $1 = -4 + \beta \Leftrightarrow 5 = \beta$, άρα ε: $y = -x + 5$.

13367.Δίνεται η ευθεία ε: $y=(\omega^2-6\omega+8)x+2$, όπου $\omega\in\mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega\in\mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x. (Μονάδες 9)

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι ω = 3. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες. (Μονάδες 5)

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Για να βρούμε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x, πρέπει να βρούμε το πρόσημο του συντελεστή διεύθυνσης.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι: $\alpha = \omega^2 - 6\omega + 8$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 36 - 32 = 4$ και οι ρίζες $\omega_1 = \frac{6+\sqrt{4}}{2} = 4$, $\omega_2 = \frac{6-\sqrt{4}}{2} = 2$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα:

ω	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$\omega^2-6\omega+8$	+	0	-	0	+

- Αν $\omega\in(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι θετικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x είναι οξεία.
- Αν $\omega\in(2,4)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι αρνητικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x είναι αμβλεία.
- Αν ω = 2 ή ω = 4 τότε ο συντελεστής διεύθυνσης μηδενίζεται και η ευθεία ε σχηματίζει μηδενική γωνία με τον άξονα x′x, είναι δηλαδή παράλληλη στον x′x.

β) i. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα για να σχηματίζει η ευθεία ε αμβλεία γωνία με τον άξονα x′x πρέπει $\omega\in(2,4)$. Επειδή όμως το ω είναι ακέραιος τότε ω = 3.

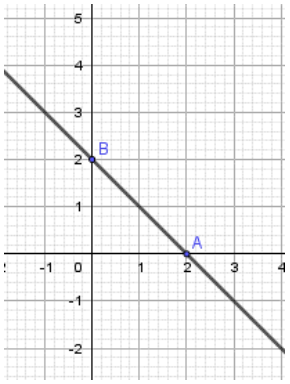
ii. Για ω = 3, ε : y = −x + 2.

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα x′x θέτουμε στην εξίσωσή της y = 0.

Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι το Α(2,0).

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα y′y, θέτουμε στην εξίσωσή της x = 0 και βρίσκουμε y = 2. Άρα το σημείο τομής είναι το Β(0,2).

iii. Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία Α και Β που βρήκαμε, τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία ε όπως στο διπλανό σχήμα.



13475.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+1)^2-(x-1)^2+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=4x+1,\ x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $g(x)=|4x+1|$. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $1\le g(x)\le 3$. (Μονάδες 8)

δ) Να αποδείξετε ότι αν ο αρνητικός αριθμός α είναι λύση της ανίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, τότε και ο αριθμός α + 1 είναι επίσης λύση της. (Μονάδες 4)

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=(x+1)^2-(x-1)^2+1=x^2+2x+1-x^2+2x-1+1=4x+1$

β) Αν $4x+1\geq 0 \Leftrightarrow 4x\geq -1 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{4}$ τότε $g(x)=4x+1$ και αν

$4x+1<0 \Leftrightarrow 4x<-1 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{4}$

τότε $g(x)=-4x-1$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g αποτελείται :

Από το τμήμα της ευθείας y =4 x + 1 με $x\geq -\frac{1}{4}$ που έχει πίνακα τιμών:

x	-1/4	1
y	0	5

και από το τμήμα της ευθείας y = - 4x - 1, $x<-\frac{1}{4}$ που έχει πίνακα τιμών:

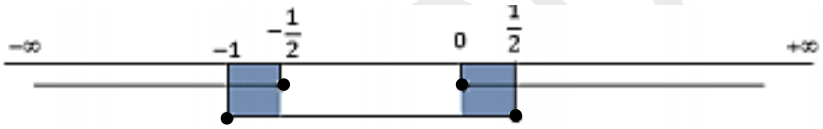
x	-1/4	-2
y	0	7

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της g.

γ) $1\leq g(x)\leq 3 \Leftrightarrow 1\leq |4x+1|\leq 3 \Leftrightarrow |4x+1|\geq 1\ (1)$ και $|4x+1|\leq 3\ (2)$

$(1)\Leftrightarrow \left(4x+1\leq -1 \Leftrightarrow 4x\leq -2 \Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{2}\right)$ ή $(4x+1\geq 1 \Leftrightarrow 4x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0)$

$(2)\Leftrightarrow -3\leq 4x+1\leq 3 \Leftrightarrow -4\leq 4x\leq 2 \Leftrightarrow -1\leq x\leq \frac{1}{2}$



Η συναλήθευση των δυο ανισώσεων φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα οπότε οι κοινές λύσεις τους, που είναι οι λύσεις της αρχικής ανίσωσης, είναι όλοι οι αριθμοί x με $x\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

δ) Αν ο αρνητικός αριθμός α είναι λύση της αρχικής ανίσωσης, τότε έχουμε $-1\leq \alpha\leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0\leq \alpha+1\leq \frac{1}{2}$

Έτσι, ο αριθμός α + 1 είναι επίσης λύση της, που είναι το ζητούμενο.

Askisopoli