ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΝΕΟ)
17/06/2020

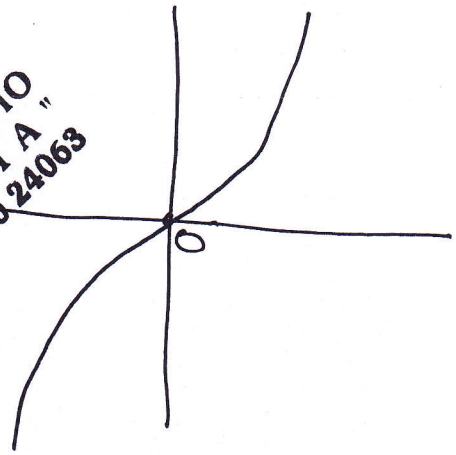
ΘΕΜΑ Α.

Α1). Σχολικο σελ 76 ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α2) -//- σελ 10

Α3) α) Ψ.

β) Εστω η συναρτηση $f(x)=x^3$.
Είναι $f'(x)=3x^2 \geq 0$
Βλεπουμε οτι η f
Είναι $\uparrow \mathbb{R}$ αφου
$f'(0)=0$.



Α4) α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε). ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β 1.

$f:(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$, $D_f=(1,+\infty)$

$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$: $g(x)=e^x$, $D_g=\mathbb{R}$

B1). $D_{f\circ g}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$

$=\{x\in\mathbb{R} \mid e^x>1\}$

$=\{x\in\mathbb{R} \mid e^x>e^0\}$

$=\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$

$=(0,+\infty)$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{g(x)+2}{g(x)-1}=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

B2) Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$

$\dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}$

$(e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1)=(e^{x_1}-1)(e^{x_2}+2)$

$\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}-e^{x_1}+2e^{x_2}\cancel{-2}=\cancel{e^{x_1}e^{x_2}}+2e^{x_1}-e^{x_2}\cancel{-2}$

$-3e^{x_1}=-3e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}$

$\xRightarrow{e^x:\,1-1} x_1=x_2 \Longrightarrow f\circ g:$ "1-1"

$\Rightarrow f\circ g$ αντιστρέφεται

$(f\circ g)^{-1} : f(D_{f\circ g}) \longrightarrow D_{f\circ g}$.

$(f\circ g)(x) = y \Rightarrow = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

$ye^x - y = e^x + 2$

$ye^x - e^x = y + 2$

$e^x(y-1) = y+2$ $\quad \{y-1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1\}$.

$e^x = \dfrac{y+2}{y-1}$

$\dfrac{y+2}{y-1} > 0 \Rightarrow$

$(y+2)(y-1) > 0$

	-2		
$+$		$-$	$+$

$x = \ln \dfrac{y+2}{y-1}$

$\xrightarrow{x=(f\circ g)^{-1}(y)}$ $(f\circ g)^{-1}(y) = \ln \dfrac{y+2}{y-1}$

$(f\circ g)^{-1}(x) = \ln \dfrac{x+2}{x-1}$

με $x > 1$

$x > 0$

$\ln \dfrac{y+2}{y-1} > 0$.

$\dfrac{y+2}{y-1} > 1$

$\dfrac{y+2}{y-1} - 1 > 0$

$\dfrac{\cancel{y}+2-\cancel{y}+1}{y-1} > 0$

$\dfrac{3}{y-1} > 0$

$y > 1$

B3) $\varphi(x)=\ln\frac{x+2}{x-1}$, $x>1$

$$\forall x>1:\ \varphi'(x)=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{\cancel{x-1}}{x+2}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^{\cancel{2}}}$$

$$=\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-2}{(x+2)(x-1)}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}$$

$$\forall x>1:\ (x+2)(x-1)>0$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{(x+2)(x-1)}<0\Rightarrow \varphi'(x)<0$$

$$\Rightarrow \varphi\downarrow(1,+\infty)$$

B4) $\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\frac{x+2}{x-1}$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Θέτω } u=\frac{x+2}{x-1}\\ \lim\limits_{x\to 1^+}u=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{0^+}=+\infty\end{array}\right]$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x+2}{x-1}$$

Θέτω $u=\frac{x+2}{x-1}$

$$\lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

$$=\lim_{u\to1}\ln u=\ln 1=0.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
" Π Ρ Ι Σ Μ Α "
ΤΗΛ 24220 24063

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\lambda, & x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Γ1) f συνεχής $\Rightarrow$ f συνεχής στο $x_0=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\lambda\right)=\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-0}-\lambda=\eta\mu 0+\lambda\sigma\upsilon\nu 0$$

$$1-\lambda=\lambda$$

$$\lambda+\lambda-1=0 \quad (1)$$

Έστω $g(x)=\lambda x+x-1$, $D_g=(0,+\infty)$

$\forall\, x>0$: $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0 \Rightarrow g\uparrow D_g$

Παρατηρώ ότι $g(1)=0$

$$(1)\Rightarrow g(\lambda)=g(1)\xRightarrow{g:\,1-1}\lambda=1$$

Γ2). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & , x\le 0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x & , 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{1-x}-1}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+x}{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1-x)}=1$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$ οπότε ορίζεται η εφαπτομένη ε της (f στο $A(0,1)$) κ' έχει σ.δ: $\lambda_\varepsilon=f'(0)=1$

οπως $\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi\omega$ με $\hat{\omega}$ την γωνία που σχηματίζει η ε με τον $x'x$

άρα $\varepsilon\varphi\omega=1\Rightarrow\omega=\dfrac{\pi}{4}$

Γ3). Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου κ' τα σημεία όπου δεν ορίζεται η f'

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, τότε η f δεν έχει σημείο στο D_f όπου δεν ορίζεται η παράγωγος

$\forall x<0$:

$$f'(x)=-\frac{1}{(1-x)^2}(1-x)'=\frac{1}{(1-x)^2}>0$$

$\forall x>0$:

$$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0$$

$$\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x \quad \left\{\begin{array}{l}\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x \text{ ΟΧΙ ταυτο-}\\ \text{χρονα μηδέν}\end{array}\right.$$

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1 \Rightarrow \varepsilon\varphi x=1 \Rightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$$

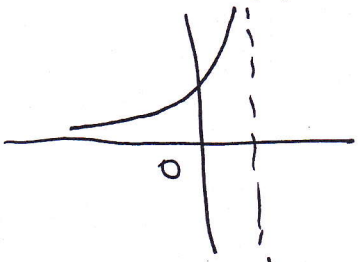
$$x=k\pi+\frac{\pi}{4} \xrightarrow{x\in(0,\frac{3\pi}{2})} \begin{cases} x=\pi/4 \\ x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

Άρα η f έχει 2 κρίσιμα σημεία τα $x_1 = \frac{\pi}{4}$ κ' $x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Γ4). $x \le 0$

$f(x) = \frac{1}{1-x}$

$= -\frac{1}{x-1}$



Η εφαπτομένη της Cf στο $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι

$\varepsilon: y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$

κ' τέμνει τον x'x στο σημείο το οποίο αληθεύει το:

$$\begin{cases} y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \\ y = 0 \end{cases}$$

$0 - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$

$\frac{1}{\cancel{\alpha-1}} = \frac{1}{(\alpha-1)^{\cancel{2}}}(x-\alpha)$

$x - \alpha = \alpha - 1$

$x = 2\alpha - 1$

α, x συναρτήσεις του χρόνου t.

$\alpha = \alpha(t)$

$x = x(t) = 2\alpha(t) - 1$

ρυθμός μεταβολής του x ως προς t.

$x'(t) = 2\alpha'(t) \xrightarrow{\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}}$

$x'(t) = -2\frac{\alpha(t)}{3}$

Την χρον. στιγμή t=to οπου $\alpha(t_0) = -1$ είναι

$x'(t_0) = -2\frac{\alpha(t_0)}{3}$

$= -2\frac{(-1)}{3}$

$= \frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ Δ:

$f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$, $A = \mathbb{R}$

Δ1). $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^x + 2x - e$.

$f''(x) = e^x + 2 > 0$

$\Rightarrow f' \uparrow \mathbb{R}$.

f' συνεχής στο $[0,1]$

$f'(0) = 1 - e < 0$

$f'(1) = e + 2 - e = 2 > 0$ $\Big\} \Rightarrow f'(0) f'(1) < 0$

Από το Θ. Bolzano $\exists$ τ. $x_0 \in (0,1)$

ώστε $f'(x_0) = 0$ κ' εφόσον $f' \uparrow$

τότε το μοναδικό ρίζα της f' στο $\mathbb{R}$

$\forall x > x_0 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$

$\forall x < x_0 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$

x	$-\infty$		0		x_0		1		$+\infty$
f'			$-$		0		$+$		
f		$\searrow$		$\searrow$	$0.E$	$\nearrow$		$\nearrow$	

Αφού η f παρουσιάζει ο.ε στο $x_0 \in (0,1)$ το $f(x_0)$

$$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0 \Rightarrow e^{x_0}=e-2x_0 \quad (1)$$

και $f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1$

$$\overset{(1)}{=} e-2x_0+x_0^2-ex_0-1$$

$$=x_0^2-(e+2)x_0+e-1.$$

Δ2). $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\ln\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}=\left(\dfrac{1}{0}\right)=+\infty$.

διότι

Είναι $f(x)\geq f(x_0)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ διότι:

η f παρουσιάζει ο.ε στο $x=x_0$ άρα

$f(x)\geq f(x_0)$ κι' το "=" ισχύει μόνο

για $x=x_0$ άρα για $x\to x_0$

$f(x)>f(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0)>0$.

Δ2) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1+(f(x)-f(x_0))\cdot \eta\mu\frac{1}{x-x_0}}{f(x)-f(x_0)}$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\eta\mu\frac{1}{x-x_0}}{f(x)-f(x_0)}$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}\cdot\left[1+\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\eta\mu\dfrac{1}{x-x_0}\right]$

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x-x_0}$ Θέτω $u = x-x_0$ και $x\to x_0 \Rightarrow u\to 0$

$= \lim\limits_{u\to 0} u\cdot\eta\mu\dfrac{1}{u} = 0$

$= +\infty\cdot(1+0) = +\infty$

13)

Δ3) $f(x)+x=x_0$

$f(x)+x-x_0=0$

Έστω $h(x)=f(x)+x-x_0$.

$\forall x\in(x_0,1): h'(x)=f'(x)+1>0$

διότι: $x>x_0 \xRightarrow{f'\uparrow} f'(x)>f'(x_0)=0$.

$f'(x)>0$

$f'(x)+1>1>0$

$h'(x)>0$

$\Rightarrow h\uparrow[x_0,1]$.

h συνεχής στο $[x_0,1]$

$h(x_0)=f(x_0)+x_0-x_0=f(x_0)<0$

διότι $x_0<1 \xRightarrow{f\uparrow} f(x_0)<f(1)$

$f(x_0)<0$.

$h(1)=\cancel{f(1)}^{\,0}+1-x_0=1-x_0>0$.

διότι $x_0<1\Rightarrow 1-x_0>0$.

Άρα $h(0)\,h(1)<0$ οπότε από Θ Bolzano

$\exists$ τ.ω. $\rho\in(x_0,1): h(\rho)=0$ Ε'ΕΨΟΘΟΝ

$h\uparrow[x_0,1]$ τότε ρ μοναδική ρίζα της

$h(x)=0 \Longleftrightarrow f(x)+x=x_0$.

Δ4) $0 < x_0 < \rho < k < 1$ (από (1)) — 14 —

$\rho \in (x_0, 1) : h(\rho) = 0 \Rightarrow f(\rho) + \rho = x_0$

$f(\rho) = x_0 - \rho$

$x_0 \in (0,1) : f'(x_0) = 0$

$f(x_0) > f(\rho)(f'(k)+1)$

$f(x_0) > f(\rho) f'(k) + f(\rho)$

$f(x_0) - f(\rho) > f(\rho) f'(k)$

$f(x_0) - f(\rho) > (x_0 - \rho) f'(k)$

$$\frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(k).$$

$$\frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(k)$$

f συνεχής στο $[x_0, \rho]$

f παραγ. στο (x_0, ρ)

άρα από ΘΜΤ $\exists\, \xi \in (x_0, \rho)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0}$$

οπότε $\xi \in (x_0, \rho) \Rightarrow \xi < k \xRightarrow{f' \uparrow}$ (από (1))

$$f'(\xi) < f'(x)$$

$$\frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(x).$$