

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ-ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ 22/3/2020

**Ζήτημα 1<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{2e}{x} + 2\ln x$ ,  $x > 0$ .

- i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 12**

- ii. Να αποδείξετε ότι  $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$  για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

- iii. Αν ισχύει  $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$  για κάθε  $x > 0$  και  $\lambda > 0$  τότε να αποδείξετε ότι  $\lambda = e$ .

**Μονάδες 6**

**Ζήτημα 2<sup>ο</sup>**

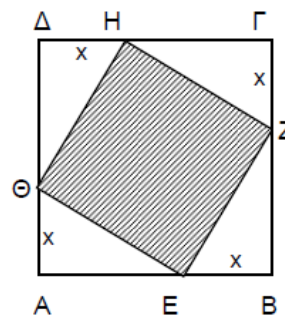
Δίνεται το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο  $EZH\Theta$  έχει τις κορυφές του στις πλευρές του  $AB\Gamma\Delta$ :

- B1.** Να εκφράσετε την πλευρά  $EZ$  συναρτήσει του  $x$ .

**Μονάδες 6**

- B2.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$$



**Μονάδες 4**

- B3.** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$  γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

**Μονάδες 9**

- B4.** Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x_0 \in [0, 2]$ , για το οποίο το εμβαδόν  $f(x_0)$  του αντίστοιχου τετραγώνου  $EZH\Theta$  ισούται με  $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$ .

**Μονάδες 6**

**Ζήτημα 3<sup>ο</sup>**

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}.$$

- B1.** Να υπολογίσετε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής.  
Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι  $\alpha = 1$ .

- B2.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[\frac{1}{2}, 4]$ .  
Μονάδες 6

- B3.** Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y = -\frac{1}{4}x + 2018$  και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.  
Μονάδες 7

- B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.  
Μονάδες 9

**Ζήτημα 4<sup>ο</sup>**

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο: } f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$ , για κάθε  $x > 0$ .  
Μονάδες 5

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το διάστημα  $(0, 1)$ .  
Μονάδες 5

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 2^{f(x)} - 1$ , για κάθε  $x > 0$ .  
Μονάδες 5

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0, \text{ όπου } 0 < \alpha < 1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς  $x$ , μία στο διάστημα  $(0, 1)$  και μία στο διάστημα  $(1, 2)$ .  
Μονάδες 5

- Δ5.** Αν  $F$  είναι μια αρχική συνάρτηση της  $f$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$  με  $F(e) = e \cdot \ln 2$ , να αποδείξετε ότι  $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)$ .  
Μονάδες 5